Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева, В.В.Григорьев-Голубев

Тема 5. **Дифференциальное исчисление функций одной переменной.** Часть 1

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 22.161.1

УДК 517.2

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева, В.В.Григорьев-Голубев. Высшая математика. Тема 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с. 26.

Ил. 3 . Табл. 20 . Библиогр.: 8 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева, В.В.Григорьев-Голубев

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1.

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Н.Н. Катрушенко

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 1 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал по теории.
4. Вопросы для подготовки к экзамену.
5. Выписка из календарного плана практических занятий.
6. Тест по теме 5. «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». Часть 1.
7. Рекомендуемая литература.
8. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 1 - го СЕМЕСТРА

Таблица 1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ темы	**Название темы**	**Распределение часов**				
		Всего	**Аудиторные занятия**			**Самостоятельная работа**
			Всего аудиторных	**Из них**		
				Лекции	**Практические занятия**	
1	Элементы линейной алгебры.	50	28	14	14	22
2	Векторная алгебра.	18	8	4	4	10
3	Аналитическая геометрия.	48	28	14	14	20
4	Теория пределов.	48	28	14	14	20
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1.	26	16	8	8	10
Всего за 1 семестр		190	108	54	54	82

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1 (8 часов).

24. Определение производной и ее геометрический и механический смысл. Определение дифференцируемой функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью (2 часа).
25. Производная суммы, произведения и частного функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции (2 часа).
26. Таблица производных основных элементарных функций (2 часа).
27. Резервная лекция (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

1. Дифференцирование функций одной переменной

1.1. Производная и ее геометрический смысл

Определение 1

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке (a, b) и пусть точка $x_0 \in (a, b)$, а число Δx такое, что новая точка $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. *Приращением* Δy *функции* $f(x)$ в точке x_0 называется разность значений функции в точках $x_0 + \Delta x$ и x_0, то есть

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

При этом число Δx называется *приращением аргумента.*

Определение 2

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке (a, b) и пусть точка $x_0 \in (a, b)$, а число Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции (Δy) к приращению аргумента (Δx) при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует и конечен.

Для производной используются обозначения $f'(x_0)$, или просто y'. Итак:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или, учитывая определение 1

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.

Доказательство

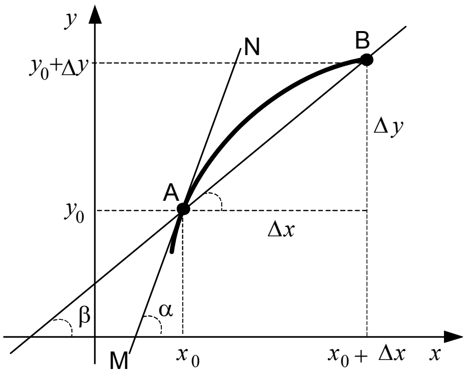

Рис.1.

Пусть $f(x)$ - непрерывная на промежутке (a, b) функция. В точке $A(x_0, y_0) \in (a, b)$ проведем невертикальную касательную MN. Через точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in (a, b)$ проведем секущую AB (рис.1).

Обозначим через β угол, который секущая AB составляет с осью Ox, а через α – угол между осью Ox и касательной MN.

Из рисунка 1 ясно, что для угла β, равного углу $\angle BAK$ в прямоугольном треугольнике ABK, выполнено равенство: $\operatorname{tg}\beta = \frac{BK}{AK} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ точка $x_0 + \Delta x$, двигаясь по оси Ox стремится к точке x_0, а точка B, двигаясь по графику функции $f(x)$, в силу непрерывности стремится к точке A. Тогда прямая AB при $\Delta x \to 0$ займет положение касательной MN. Поэтому $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = \mathrm{k}$, где k - угловой коэффициент касательной. Таким образом, доказано, что $f'(x_0) = \mathrm{k}$.

1.2. Дифференцируемая функция

Определение 1

Функция $f(x)$, заданная на промежутке (a, b), называется дифференцируемой в точке $x_0 \in (a, b)$, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \vartheta(\Delta x),$$

где A – конечное число, а символом $\vartheta(\Delta x)$ обозначена функция, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

В определении дифференцируемой функции приращение Δy представлено в виде двух слагаемых, которые являются бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое – бесконечно малая функция одного порядка с Δx, а второе слагаемое – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции

Функция $f(x)$, заданная на промежутке (a, b), является дифференцируемой в точке $x_0 \in (a, b)$ тогда, и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$.

Доказательство

Доказательство этой теоремы будет состоять из двух частей. Во-первых, следует доказать, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то у нее в этой точке существует конечная производная. Во-вторых, нужно доказать обратное, а именно: функция, имеющая конечную производную в какой-то точке является дифференцируемой в этой точке.

1) Пусть функция $f(x)$ - дифференцируема в точке x_0. Тогда по определению дифференцируемой функции ее приращение можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \vartheta(\Delta x),$$

где A - конечное число, а $\vartheta(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ функция более высокого порядка, чем Δx.

Разделив это равенство на $\Delta x \neq 0$ и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vartheta(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Следовательно, производная $f'(x_0)$ существует и равна конечному числу A.

2) Пусть в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$. Это означает, что существует и равен конечному числу предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Обозначим $f'(x_0) = A$ и воспользуемся тем, что разность между функцией и ее конечным пределом является бесконечно малой в точке, в которой вычисляется этот предел. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - A = \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Решая последнее равенство относительно приращения Δy, получим

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Так как $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx и можно обозначить $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \vartheta(\Delta x)$, то из полученного соотношения следует дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Из доказательства теоремы следует смысл числа A в определении дифференцируемой функции: $A = f'(x_0)$. Учитывая доказанную теорему, дифференцируемую в точке x_0 функцию $f(x)$ можно определить как функцию, приращение которой в этой точке представимо в виде:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \vartheta(\Delta x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Так как дифференцируемость функции в некоторой точке равносильна существованию у нее конечной производной в этой точке, то операцию вычисления производной называют дифференцированием.

ЗАМЕЧАНИЕ 4

Если функция не имеет конечной производной в некоторой точке, то она называется не дифференцируемой в этой точке

Определение 2

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой на промежутке (a,b), если она является дифференцируемой в каждой точке $x_0 \in (a,b)$.

1.3. Непрерывность и дифференцируемость функции

Теорема

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство

Из определения функции, дифференцируемой в точке x_0, следует, что ее приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot \Delta x + \vartheta(\Delta x).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что $f'(x_0)$ - конечное число, а $\vartheta(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ функция, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Следовательно, при бесконечно малом приращении Δx, приращение функции Δy тоже является бесконечно малым. Значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Обратное утверждение неверно. Непрерывная в точке x_0 функция может не быть в этой точке дифференцируемой. Это можно показать на следующих примерах.

Пример 1

Функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис.2) определена и непрерывна на всей числовой оси. Однако в точке $x_0 = 0$ она не является дифференцируемой, так как ее производная $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ в этой точке бесконечна. Касательная к графику функции в точке $x_0 = 0$ перпендикулярна оси Ox.

Пример 2

Функция $y = |x|$ (рис.3) определена и непрерывна на всей числовой оси, а в точке $x_0 = 0$ она не является дифференцируемой, так как ее производная y' в этой точке не существует. Действительно, $y = \left[\begin{array}{ll} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow y' = \left[\begin{array}{ll} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{array}\right.$.

То, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$ легко видеть из ее графика. При $x < 0$ касательной к графику является прямая $y = -x$, а при $x > 0$

касательной является прямая $y = x$. При переходе через точку $x_0 = 0$ касательная не меняется непрерывно.

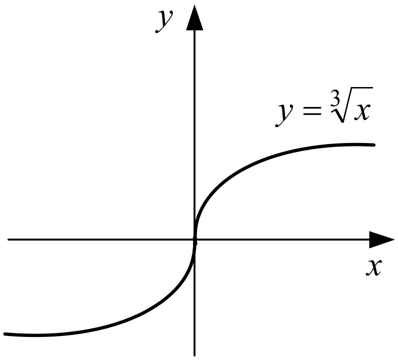

Рис.2.

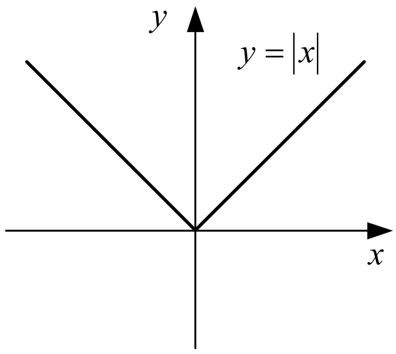

Рис.3.

Определение

Если у функции $y = f(x)$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной в точке $x_0 = 0$ справа.

Если у функции $y = f(x)$ существует конечный $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной в точке $x_0 = 0$ *слева.*

Производные справа и слева называются *односторонними* производными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Функция $y = |x|$ дифференцируема справа и слева, так как существуют и конечны односторонние производные. При этом производная справа равна 1, а производная слева равна -1.

Следует заметить, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ не является дифференцируемой ни справа, ни слева, поскольку ее односторонние производные в точке $x_0 = 0$ бесконечны.

1.4. Правила дифференцирования

Производная функции, тождественно равной постоянной

Если функция $f(x)$ тождественно равна постоянной, то производная от нее тождественно равна нулю, то есть, если $f(x) \equiv c$, то $f'(x) \equiv 0$.

Доказательство очевидно, так как для такой функции в любой точке x приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c \equiv 0$.

Производная суммы и разности функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то функции $y = f(x) \pm g(x)$ тоже дифференцируемы в точке x и их производные вычисляются по правилу:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x).$$

Доказательство

$$y' = \left(f(x) \pm g(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)\right) - \left(f(x) \pm g(x)\right)}{\Delta x}.$$

Приращение суммы (разности) функций можно представить в виде суммы (разности) приращений каждого слагаемого.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) \pm \left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x}.$$

Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то можно использовать теорему о пределе суммы и разности функций.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x).$$

Производная произведения функций

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то функция $y = f(x) \cdot g(x)$ тоже дифференцируема в точке x и ее производная вычисляется по правилу:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Доказательство

Составим приращение Δy для функции $y = f(x) \cdot g(x)$.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) g(x+\Delta x) - f(x) g(x).$$

Прибавим и вычтем выражение $f(x) \cdot g(x+\Delta x)$ и сгруппируем слагаемые попарно.

$$\Delta y = \left[f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)\right] + \left[f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)\right].$$

Из первой скобки можно вынести общий множитель $g(x+\Delta x)$, а из второй – $f(x)$.

$$\Delta y = \left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \left[g(x+\Delta x) - g(x)\right].$$

Выражения в скобках представляют собой приращения функций $f(x)$ и $g(x)$, поэтому

$$\Delta y = \Delta f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x).$$

Тогда, используя определение производной, можно записать:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x}, \text{ или}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right).$$

Используя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получим:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \cdot .$$

Из дифференцируемости функции $f(x)$ следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Из дифференцируемости функции $g(x)$ следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = g'(x)$.

Так как дифференцируемая в точке x функция $g(x)$ непрерывна в этой точке, то по определению непрерывной функции $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$. Следовательно,

$$y' = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot$$

Следствие

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, а c - конечное число, то функция $y = cf(x)$ тоже дифференцируема в точке x и при этом

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x).$$

Доказательство

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c'\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = c\cdot f'(x).$$

Производная частного

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x и $g(x) \neq 0$, то функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ тоже дифференцируема в точке x и ее производная вычисляется по правилу:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство

Составим приращение Δy для функции $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}.$$

Прибавим и вычтем в числителе выражение $f(x)\cdot g(x)$ и сгруппируем слагаемые попарно. Получим

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} =$$
$$= \frac{\left[f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)\right] - \left[f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\right]}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}.$$

Из первой скобки можно вынести общий множитель $g(x)$, а из второй – $f(x)$. Тогда приращение Δy запишется в виде:

$$\Delta y = \frac{\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]\cdot g(x) - f(x)\cdot\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}, \text{ или}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot \Delta g(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}.$$

Используя определение, запишем выражение для производной в виде

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot \Delta g(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)\cdot \Delta x},$$

затем, проведя под знаком предела тождественные преобразования и учитывая, что $g(x)$ не зависит от переменной Δx, преобразуем его

$$y' = \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)} \left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right] \right).$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ не зависят от переменной Δx, то по теоремам о пределах получим

$$y' = \frac{1}{g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right).$$

Из дифференцируемости $f(x)$ следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$. Из дифференцируемости (и непрерывности) $g(x)$ следует, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = g'(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$. Поэтому

$$y' = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \left(f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) \right), \text{ или } y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Теорема о производной обратной функции

Если функция $y(x)$ монотонна на промежутке $(a;b)$ и дифференцируема в точке $x \in (a;b)$, то существует обратная функция $x = x(y)$, которая дифференцируема в точке y и ее производная определяется из соотношения

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Доказательство

Функция $x(y)$ дифференцируема в точке y, если существует конечный предел

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Докажем это. Поскольку по условию существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, причем в силу монотонности $y'(x) \neq 0$, то по теореме о пределе частного существует и конечен предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}$.

Из дифференцируемости функции $y(x)$ в точке x следует ее непрерывность в этой точке, а это означает, что при $\Delta x \to 0$ приращение функции $\Delta y \to 0$. Учитывая это, можно от предела при $\Delta x \to 0$ перейти к пределу при $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'(y).$$

Следовательно, существует конечная производная x'_y, которая вычисляется по правилу:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Производная сложной функции

Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x и функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = u(x)$, то суперпозиция функций (сложная функция)

$y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная по переменной x вычисляется по правилу:

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x .$$

при этом нижние индексы показывают, по какой переменной берется производная.

Доказательство

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta x}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на приращение $\Delta u \neq 0$, получим

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} .$$

Так как функция $u(x)$ дифференцируема точке x, следовательно, она в этой точке непрерывна. Поэтому приращение функции $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Переходя в первом сомножителе от предела при $\Delta x \to 0$ к пределу при $\Delta u \to 0$, получим

$$y'_x = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Из дифференцируемости функций $f(u)$ и $u(x)$ следует, что оба предела существуют, конечны и равны производным по переменным u и x соответственно, то есть $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Правило дифференцирования суперпозиции функций (сложной функции) следует понимать так, что если требуется вычислить производную от функции $y = \sin^2 x$, то следует иметь в виду, что вычисляется производная суперпозиции функций $y = u^2$, где $u = \sin x$. Тогда следует вычислить производную $y'_u = \left(u^2\right)'_u = 2u$ и производную $u'_x = (\sin x)'_x = \cos x$. Далее по правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = 2u \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x .$$

Из доказанных теорем данного параграфа можно сформулировать следующие правила дифференцирования:

1. $(c)' = 0$.
2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$.
3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$.
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.
6. $y'_x = \left(f(u(x))\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.

1.5. Производные основных элементарных функций

Используя теоремы предыдущего параграфа, можно получить формулы для вычисления производных основных элементарных функций.

Производная степенной функции

$$\boxed{\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}}.$$

Доказательство

$$y' = \left(x^{\alpha}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x}.$$

В числителе дроби под знаком предела можно вынести за скобку, а затем и за знак предела множитель x^{α}, который не зависит от переменной Δx. Тогда для производной получим выражение

$$y' = \left(x^{\alpha}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\cdot\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\Delta x} = x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x}.$$

Поскольку функция $\frac{\Delta x}{x}$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, то по таблице эквивалентных бесконечно малых справедливо

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1 \underset{\Delta x\to 0}{\sim} \alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}.$$

Заменяя под знаком предела бесконечно малую $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1$ на эквивалентную ей бесконечно малую $\alpha\cdot\dfrac{\Delta x}{x}$, получим

$$y' = \left(x^{\alpha}\right)' = x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Производная экспоненциальной и показательной функций

$$\boxed{\left(e^{x}\right)' = e^{x};\quad \left(a^{x}\right)' = a^{x}\cdot\ln a}.$$

Доказательство

$$y' = \left(e^{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^{x}}{\Delta x}.$$

В числителе дроби под знаком предела можно вынести за скобку, а затем и за знак предела множитель e^{x}, который не зависит от переменной Δx. Тогда для производной получим выражение

$$y' = \left(e^{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x}e^{\Delta x} - e^{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

По таблице эквивалентных бесконечно малых $e^{\Delta x} - 1 \underset{\Delta x\to 0}{\sim} \Delta x$. Заменяя под знаком предела бесконечно малую функцию $e^{\Delta x} - 1$ на эквивалентную ей бесконечно малую Δx, получим

$$y' = \left(e^{x}\right)' = e^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^{x}.$$

Для показательной функции с любым основанием $a > 0$ и $a \neq 1$ производная вычисляется по правилу:

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a,$$

поскольку по основному логарифмическому тождеству $a = e^{\ln a}$, то $\left(a^x\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)'$. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \left(x \cdot \ln a\right)' = a^x \cdot \ln a.$$

Производная логарифмической функции

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}.$$

Доказательство

Для функции $y = \ln x$ определена обратная функция $x = e^y$. Используя правило дифференцирования обратной функции, получим

$$(\ln x)_x' = \frac{1}{\left(e^y\right)_y'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Правило дифференцирования логарифмической функции с произвольным основанием $a > 0$ и $a \neq 1$, можно вывести, используя свойства логарифма $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Тогда

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}; \quad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Производные тригонометрических функций

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Доказательство

По определению производной $y' = (\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Представив приращение функции $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ по формуле преобразования разности синусов в произведение в виде $\Delta y = 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, получим следующее выражение для производной

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций, по которой $\sin \frac{\Delta x}{2} \underset{\Delta x \to 0}{\sim} \frac{\Delta x}{2}$, заменим под знаком предела бесконечно малую $\sin \frac{\Delta x}{2}$ на бесконечно малую $\frac{\Delta x}{2}$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Из непрерывности функции $\cos x$ следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$. Значит,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Чтобы доказать, что $(\cos x)' = -\sin x$, представим $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ по формуле приведения, а затем вычислим производную полученной функции, используя правило дифференцирования сложной функции.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right)'_x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)'_x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\sin x .$$

Теперь вычислим производную для функции $y = \operatorname{tg} x$. Поскольку $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то можно использовать правило дифференцирования частного двух функций.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} .$$

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Выражение для производной функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить, используя основное тригонометрическое тождество $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ и выразив из него функцию $\operatorname{ctg} x$ по формуле $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = (\operatorname{tg} x)^{-1}$. Теперь можно использовать правило дифференцирования сложной функции.

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left((\operatorname{tg} x)^{-1}\right)' = -1\cdot(\operatorname{tg} x)^{-2}\cdot(\operatorname{tg} x)' =$$

$$= -(\operatorname{tg} x)^{-2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} .$$

Производные обратных тригонометрических функций

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}; \quad (\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}}.$$

Доказательство

Функция $y = \arcsin x$ определена на промежутке $x \in [-1; 1]$ и ее значения принадлежат промежутку $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Обратная функция $x = \sin y$ определена на промежутке $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. По правилу дифференцирования обратной функции, вычислим производную для функции $y = \arcsin x$.

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} .$$

Функцию $\cos y$ можно выразить через функцию $\sin y$ из основного тригонометрического тождества $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$.

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} .$$

Поскольку $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что соответствует первой и четвертой четвертям тригонометрического круга, то $\cos y \ge 0$. Следовательно, $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$, где $\sin y = x$. Тогда для производной для функции $y = \arcsin x$ справедливо равенство:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для вычисления производной от функции $y = \arccos x$ используем соотношение $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ и выразим из него $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Долее можно использовать правило дифференцирования разности двух функций.

$$(\arccos x)' = \left(\tfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = \left(\tfrac{\pi}{2}\right)' - (\arcsin x)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ задана на промежутке $x \in (-\infty; \infty)$ и ее значения принадлежат промежутку $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. На промежутке $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ определена обратная функция $x = \operatorname{tg} y$. Для вычисления ее производной можно использовать правило дифференцирования обратной функции.

$$y'_x = (\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y.$$

Из основного тригонометрического тождества $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ следует, что $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$. Следовательно, $(\operatorname{arctg} x)'_x = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Для вычисления производной от функции $y = \operatorname{arcctg} x$ используем соотношение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ и выразим из него $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Долее можно использовать правило дифференцирования разности двух функций.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = \left(\tfrac{\pi}{2}\right)' - (\operatorname{arctg} x)' = 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производные гиперболических функций

Гиперболическими называются следующие функции:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус; $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус;

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ – гиперболический тангенс; $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ – гиперболический котангенс.

Для гиперболических функций справедливы соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x; \quad 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x;$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1; \quad 1 + \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad 1 + \operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Для производных гиперболических функций справедливы соотношения:

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}}.$$

Доказательство

$$(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x;\quad (\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x.$$

$$(\operatorname{th}x)'=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{\operatorname{sh}'x\cdot\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}'x\cdot\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},$$ так как $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$.

$$(\operatorname{cth}x)'=\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}\right)'=-\frac{1}{\operatorname{th}^2x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=-\frac{\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^2x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$$

Полученные результаты запишем в таблицу 3.

Таблица 3. Производные основных элементарных функций.

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)'=e^x$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\operatorname{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\operatorname{th}x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$
$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2x}$	$(\operatorname{cth}x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$
$(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2x}$	

1.6. Примеры вычисления производных

Пример 1

Вычислите производную функции $y=e^{-x^2}$.

Решение

По правилу дифференцирования сложной функции следует сначала вычислить производную экспоненты по ее сложному аргументу $-x^2$. Это означает, что в табличной производной $(e^x)'=e^x$ переменную x нужно заменить переменной $-x^2$. Эту производную необходимо умножить на производную от сложного аргумента $-x^2$ по переменной x. Правило дифференцирования заданной функции можно записать в следующем виде

$$y' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot \left(-x^2\right)' = e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Пример 2

Вычислите производную функции $y = \sqrt{\cos(3x-2)}$.

Решение

Заданная функция является суперпозицией трех функций $y = (\cos(3x-2))^{\frac{1}{2}}$. Будем дифференцировать эту функцию, используя правила дифференцирования, начиная с внешней, степенной функции:

$$y' = \left((\cos(3x-2))^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot (\cos(3x-2))' \cdot (3x-2)'.$$

При этом следует понимать, что дифференцируя внешнюю функцию (степенную или косинус), нельзя менять ее сложный аргумент. Используя таблицу производных, получим

$$y' = \tfrac{1}{2} \cdot \cos^{-\frac{1}{2}}(3x-2) \cdot (-\sin(3x-2)) \cdot 3.$$

Упростим полученное для производной выражение

$$y' = -\frac{3\sin(3x-2)}{2\sqrt{\cos(3x-2)}}.$$

Пример 3

Вычислите производную функции $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x} \cdot \ln x$.

Решение

По правилу дифференцирования произведения функций

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' \cdot \ln x + \operatorname{arctg}\sqrt{x} \cdot (\ln x)'.$$

По таблице производных $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Функция $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ является сложной, ее производную следует вычислять по правилу дифференцирования суперпозиции функций.

$$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)' \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Производная заданной функции равна

$$y' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \operatorname{arctg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Производная степенной функции $y = \sqrt{x}$ очень часто встречается в задачах. Рекомендуем ее запомнить

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Пример 4

Вычислите производную функции $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{3^{\sin x}}$.

Решение

По правилу дифференцирования частного двух функций, производную от заданной функции можно записать в виде:

$$y' = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{\mathrm{x}}\right)' \cdot 3^{\sin x} - \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \left(3^{\sin x}\right)'}{\left(3^{\sin x}\right)^2}.$$

Функции $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ и $3^{\sin x}$ – сложные. Поэтому производные от этих функций по переменной x вычислим, используя правило дифференцирования суперпозиции функций

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'.$$

Производная от функции $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ по переменной $\frac{1}{x}$ получится, если в табличную производную $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ подставить переменную $\frac{1}{x}$ вместо переменной x, то есть

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}}.$$

Производная $\left(\dfrac{1}{x}\right)'$ может быть вычислена по таблице, если учесть, что $\frac{1}{x} = x^{-1}$ и использовать правило дифференцирования степенной функции, то есть

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Тогда

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x} \cdot x^2}.$$

Аналогично, по правилу дифференцирования суперпозиции функций вычисляется производная от функции $3^{\sin x}$.

$$\left(3^{\sin x}\right)' = \left(3^{\sin x}\right)' \cdot (\sin x)' = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x.$$

Подставим вычисленные производные в формулу для производной частного и запишем производную от заданной функции в виде:

$$y' = \frac{-\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x} \cdot x^2} \cdot 3^{\sin x} - \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x}{3^{2\sin x}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Производная степенной функции $y = \dfrac{1}{x}$ очень часто встречается в задачах. Рекомендуем ее запомнить

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}.$$

Пример 5

Вычислить производную функции $y=\left(\dfrac{x}{\arcsin 2x}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение

Заданная функция называется показательно-степенной. Прежде чем вычислять ее производную, запишем эту функцию, используя основное логарифмическое тождество $y=e^{\ln y}$. Получим

$$y=e^{\ln\left(\frac{x}{\arcsin 2x}\right)^{\operatorname{ctg} x}}.$$

Вынося показатель степени за знак логарифма, и раскрывая логарифм частного, полученное выражение можно записать в виде: $y=e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)}$.

Тогда, дифференцируя его по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$y'=e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)}\cdot(\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x))'=$$

$$=e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)}\cdot\left[(\operatorname{ctg} x)'\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)+\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)'\right]=$$

$$=e^{\operatorname{ctg} x\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)}\cdot\left[-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot(\ln x-\ln\arcsin x)+\operatorname{ctg} x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right].$$

1.7. Уравнение касательной к кривой. Угол между кривыми.

Уравнение касательной

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$\boxed{y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}.$$

Доказательство

Было доказано, что производная дифференцируемой в точке x_0 функции $y=f(x)$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0. Следовательно, если записать уравнение касательной в виде $y=kx+b$, то $k=f'(x_0)$. Тогда уравнение примет вид

$$y=f'(x_0)\cdot x+b.$$

Параметр b определим, учитывая, что касательная проходит через точку $(x_0, f(x_0))$. Подставив в уравнение касательной $x=x_0$, $y=f(x_0)$, получим

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b.$$

Из этого соотношения следует, что $b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$ и уравнение касательной примет вид:

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0).$$

Пример 1

Напишите уравнение касательной к графику функции $y = e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение

Уравнение касательной запишем в виде:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Поскольку $f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$, $f'(x_0) = e^0 = 1$, $f(x_0) = e^0 = 1$, то касательная к графику заданной функции в точке $x_0 = 0$ задается уравнением $y = x + 1$.

Пример 2

Найдите угол между кривыми $y = \frac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$ в точке их пересечения.

Решение

Углом между кривыми, пересекающимися в точке с абсциссой x_0, называется угол между их касательными, проведенными в этой точке. Поскольку уравнение $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ имеет один корень $x_0 = 1$, то кривые пересекаются в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Напомним, что угол между прямыми, заданными уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Так как $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, то угловой коэффициент k_1 касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке абсциссой $x_0 = 1$ равен: $k_1 = -1$.

Так как $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, то угловой коэффициент k_2 касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке абсциссой $x_0 = 1$ равен: $k_2 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$, откуда следует, что угол между кривыми $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Как определяется производная функции $f(x)$ в точке x_0?
2. Как характеризует график функции $y = f(x)$ число $f'(x_0)$ - значение производной этой функции в точке x_0?
3. Какая функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0?
4. Является ли дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывной в этой точке?
5. Всегда ли непрерывная в точке x_0 функция дифференцируема в этой точке?

6. Задана функция $y = f(x)$. Как выяснить будет ли она дифференцируемой в некоторой точке?
7. Может ли функция $y = f(x) + g(x)$ быть не дифференцируемой в некоторой точке из ее области определения, если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются дифференцируемыми в этой точке?
8. По какому правилу вычисляется производная суммы двух функций?
9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются дифференцируемыми в некоторой точке. Будет ли функция $y = f(x) \cdot g(x)$ дифференцируемой в этой точке и по какому правилу вычисляется ее производная?
10. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются дифференцируемыми в некоторой точке. Всегда ли дифференцируема в этой точке функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и по какому правилу вычисляется ее производная?
11. Какая функция называется суперпозицией (сложной функцией) нескольких элементарных функций и по какому правилу она дифференцируется?
12. По какому правилу вычисляется производная для степенной функции $y = x^n$?
13. По какому правилу вычисляется производная для показательной функции $y = a^x$ и экспоненты $y = e^x$?
14. По какому правилу вычисляется производная для логарифмической функции $y = \ln x$ и $y = \log_a x$?
15. Как выглядят правила вычисления производных тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$?
16. Как выглядят правила вычисления производных обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$?
17. Как выглядят правила вычисления производных гиперболических функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ и $y = \operatorname{cth} x$?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение производной и ее геометрический смысл.
2. Определение функции, дифференцируемой в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.
3. Теорема о связи между дифференцируемостью и непрерывностью.
4. Производная функции, тождественно равной постоянной. Производная суммы и разности функций.
5. Производная произведения функций.
6. Производная частного функций.
7. Производная суперпозиции функций и производная обратной функции.
8. Производная степенной функции, экспоненты и показательной функции.
9. Производная логарифмической функции.
10. Производные тригонометрических функций.
11. Производные обратных тригонометрических функций.
12. Производные гиперболических функций.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ