Федеральное агентство по образованию Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

В.В.Григорьев-Голубев, И.В.Евграфова

Тема 8. **Ряды.** Часть 1. **Числовые и функциональные ряды.**

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2006

ББК 22.161
УДК 517.50

В.В.Григорьев-Голубев, И.В.Евграфова. Высшая математика. Тема 8. Ряды. Часть 1. Числовые и функциональные ряды. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с. 82.

Ил. 3. Табл. 23. Библиогр.: 8 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Числовые и функциональные ряды», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. В разделе «Теоретический материал» содержится также необходимый набор типовых задач с подробным разбором решения. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

В.В.Григорьев-Голубев, И.В.Евграфова

Тема 8. РЯДЫ. Часть 1. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Я.Ю.Ионченкова

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 2 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 8 «Числовые и функциональные ряды».
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 2 СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план

	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самост. работа
			Всего аудитор-ных	Из них		
				Лекции	Практ. занятия	
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2.	48	28	16	12	20
6	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	38	26	12	14	12
7	Интегральное исчисление.	66	44	24	20	22
8	Ряды. 1 часть. Числовые и функциональные ряды.	38	28	20	8	10
Всего за 2 семестр		190	126	72	54	64

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

8. Ряды. Часть 1. Числовые и функциональные ряды (20 часов)

27. Числовой ряд. Общий член ряда. Частичная сумма ряда. Сходимость числового ряда. Геометрический ряд. Гармонический ряд (2 часа).

28. Основные свойства числовых рядов. Остаток ряда. Необходимые признаки сходимости числовых рядов. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признак сравнения, предельный признак сравнения (2 часа).

29. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши и интегральный признак Маклорена-Коши сходимости положительных рядов (2 часа).

30. Знакочередующийся ряд. Признак Лейбница. Знакопеременный ряд. Абсолютная и условная сходимость. Признак абсолютной сходимости. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Вычисление суммы числового ряда с заданной точностью (2 часа).

31. Функциональный ряд. Область сходимости функционального ряда. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов (2 часа).

32. Признак Вейерштрасса. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование равномерно сходящихся рядов (2 часа).

33. Степенной ряд. Свойства степенных рядов. Теорема Абеля. Теорема о коэффициентах степенного ряда и следствия из неё (2 часа).

34. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$. Разложение функций в степенные ряды (методы подстановки, дифференцирования и интегрирования) (2 часа)

35. Приложения степенных рядов: приближённое вычисление значений функций, интегралов и суммы ряда (2 часа).

36. Заключительная лекция (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

8.1. Числовые ряды.	
8.1.1.	Определение числового ряда и его сходимости.
8.1.2.	Основные свойства числовых рядов.
8.1.3.	Необходимые признаки сходимости числовых рядов.
8.1.4.	Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.
8.1.5.	Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.
8.1.6.	Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
8.1.7.	Вычисление суммы числового ряда с заданной точностью.
8.2. Функциональные ряды.	
8.2.1.	Основные понятия.
8.2.2.	Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов.
8.2.3.	Степенной ряд и его свойства.
8.2.4.	Теоремы о коэффициентах степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена.
8.2.5.	Разложение функций в степенные ряды.
8.2.6.	Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена.
8.2.7.	Приложения степенных рядов.

8.1. Числовые ряды

Бесконечные ряды играют важную роль в математике и ее приложениях. С их помощью определяются некоторые функции, вычисляются с любой степенью точности значения функций и составляются таблицы многих функций; бесконечные ряды используются при вычислении интегралов и при решении дифференциальных уравнений.

8.1.1. Определение числового ряда и его сходимости

Определение 1

Пусть задана последовательность $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Строим новую последовательность $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ по правилу $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, …, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Две последовательности: заданная $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и построенная на ней $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ называют ***рядом*** и обозначают $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Часто для обозначения ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ употребляют запись

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Аналитическое выражение для n-го члена ряда u_n часто называют общим членом ряда. Например, у геометрической прогрессии $a, a\cdot q, a\cdot q^2, \ldots$ общим членом является $u_n = a\cdot q^{n-1}$.

Определение 2

Сумма n первых членов ряда $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ называется n ***-ой частичной*** (частной) ***суммой*** этого ряда.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Очевидно, что первая, вторая, третья и т.д. частичные суммы ряда: $S_1 = u_1$; $S_2 = u_1 + u_2$; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$; … образуют числовую последовательность: $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

При неограниченном возрастании числа слагаемых суммы S_n могут представиться следующие возможности:

1) S_n стремится к определенному конечному пределу;

2) S_n неограниченно возрастает по модулю;

3) S_n не стремится к определенному пределу, хотя и не возрастает неограниченно.

Определение 3

Ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ называется ***сходящимся***, если при $n\to\infty$ последовательность его частичных сумм имеет конечный предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Значение S этого предела называется суммой ряда.

Определение 4

Ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ называется ***расходящимся***, если при $n\to\infty$ последовательность его частичных сумм имеет бесконечный предел или не имеет предела.

ЗАМЕЧАНИЕ 4

Если ряд сходится и имеет сумму S, то употребляется запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

С данными выше определениями сходимости и расходимости ряда связаны две основные задачи теории числовых рядов:

1. Дан ряд. Определить, сходится он или расходится.
2. Дан сходящийся ряд. Найти его сумму. (Точное вычисление суммы удается в сравнительно немногих случаях.)

Пример 1

Ряд вида

$$a+a\cdot q+a\cdot q^2+\ldots+a\cdot q^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$$

называется ***геометрическим рядом*** (члены этого ряда образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем q). Общий член этого ряда имеет вид

$$u_n = a\cdot q^{n-1}.$$

Выясним, при каких условиях ряд будет сходящимся.

Решение

Составим n-ую частичную сумму ряда

$$S_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^{n-1}.$$

При $q \neq 1$ формула суммы n первых членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a \cdot \left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a \cdot q^n}{1 - q}.$$

Отсюда следует:

1) Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{a \cdot q^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}$

(т.к. $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$). Это означает, что при $|q| < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$

сходится и его сумма равна $\frac{a}{1 - q}$.

$$\frac{a}{1 - q} = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots \qquad \left(|q| < 1\right)$$

Например, если $a = 1$ и $q = \frac{1}{2}$, то $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = 2$.

2) Если $|q| > 1$, то $\left|q^n\right| \to \infty$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ при $|q| > 1$ расходится и сумма для него не определена.

3) Если $q = +1$, то ряд имеет вид: $a + a + a + \ldots + a + \ldots$. В этом случае $S_n = a \cdot n \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ при $q = +1$ расходится.

4) Если $q=-1$, то ряд имеет вид: $a-a+a-a+\ldots$. В этом случае $S_n=\begin{cases} 0 & при\ n-четном \\ a & при\ n-нечетном \end{cases}$. Следовательно S_n предела не имеет, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$ при $q=-1$ расходится. В частности, расходится ряд $1-1+1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$.

Пример 2

Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение

Общий член этого ряда $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ есть правильная рациональная дробь. Разлагая ее на простейшие, получим

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Т.к. n-ая частичная сумма $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ или, с учетом формулы $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$ то

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Из этого следует, что ряд сходится, его сумма равна 1.

Пример 3

Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называется ***гармоническим***. Доказать, что этот ряд расходится.

Решение

Общий член ряда $u_n=\frac{1}{n}$, n -ая частичная сумма

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Предположим противное. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ сходится и имеет сумму S. Тогда верны равенства $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ и $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0$. Но

$$S_{2n}-S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Если заменить теперь каждый член в последнем соотношении на $\frac{1}{2n}$, для $S_{2n}-S_n$ будет выполняться неравенство

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n\ раз}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

т.е. $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$. В таком случае равенство $\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=0$ невозможно. А это означает, что предположение о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ неверно. Остается одно – гармонический ряд расходится.

8.1.2. Основные свойства числовых рядов

Свойство 1. *Сходимость или расходимость ряда не изменится если добавить или отбросить конечное число членов ряда.*

Действительно, пусть $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ - исходный ряд, а $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n$ - ряд,в котором отброшено конечное число членов. Тогда для их частичных сумм S_n и S'_n справедливо соотношение $S_n = S'_n + C$, где C - константа. Поэтому последовательности $\{S_n\}$ и $\{S'_n\}$ сходятся или расходятся одновременно.

Определение 5

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится и имеет сумму S, то разность $S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ называют ***остатком ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ после n-ого члена или n-ым остатком и обозначают r_n, т.е.

$$r_n = S - S_n.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$ получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = S - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$. Тем самым доказано, что полученный результат является важным свойством сходящегося ряда.

Свойство 2. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится, то его остаток стремится к нулю при* $n \to \infty$.

Свойство 3. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится и имеет сумму* S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$, *где* c *- константа, тоже сходится и имеет сумму* $c \cdot S$.

Это свойство следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c \cdot u_k = \lim_{n\to\infty} c \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k = c \cdot S .$$

Заметим, что от умножения каждого члена расходящегося ряда на $c \neq 0$ расходимость ряда не нарушается.

Свойство 4. *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся и имеют суммы* S *и* $\tilde{S}$, *то ряд полученный почленным сложением, т.е. ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *сходится и имеет сумму* $S + \tilde{S}$.

Действительно, пусть S_n и $\tilde{S}_n$ - частные суммы заданных рядов, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S , \ \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \tilde{S} ,$$

тогда $S_n + \tilde{S}_n$ - частная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$. Очевидно, что $\lim_{n\to\infty} \left(S_n + \tilde{S}_n \right) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = S + \tilde{S}$, это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ сходится. Таким образом доказано, что сумма двух сходящихся рядов есть ряд сходящийся.

Опираясь на свойство 3 (полагая $c = -1$) и свойство 4 легко доказать, что и разность двух сходящихся рядов есть ряд сходящийся.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Проследив доказательство свойства 4 легко увидеть, что сумма сходящегося ряда и расходящегося есть ряд расходящийся.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Сумма двух расходящихся рядов может как сходиться, так и расходиться.

Свойство 5. *От объединения членов сходящегося ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *в группы (без нарушения порядка членов)* $\left(u_1+\ldots+u_{n_1}\right)+\left(u_{n_1+1}+\ldots+u_{n_2}\right)+\ldots+\left(u_{n_k+1}+\ldots+u_{n_{k+1}}\right)+\ldots$ *его сходимость и сумма не изменяются.*

Доказательство этого свойства следует из известного положения теории пределов. Если последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ сходится и имеет предел S, то и любая подпоследовательность, в частности $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_{k+1}}, \ldots$, тоже сходится и имеет тот же предел S.

8.1.3. Необходимые признаки сходимости числовых рядов

Теорема 1 *(1-ый необходимый признак)*

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по условию. По определению 3 это означает, что $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Рассмотрим $n-1$ частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Так как $u_n = S_n - S_{n-1}$, то переходя в этом равенстве к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Следствие

Если общий член u_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ при неограниченном возрастании n к нулю не стремится, то этот ряд расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Заметим, что доказанный признак является лишь необходимым, но не достаточным, т.е. из стремления общего члена ряда к нулю еще не следует его сходимость. Примером этого может служить гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как мы уже доказали, расходится, однако $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 2 *(2-ой необходимый признак)*

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена.

Доказательство

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ - последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Т.к. этот ряд сходится, то последовательность $\{S_n\}$ имеет конечный предел и, следовательно, ограничена.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Не следует думать, что обратное заключение верно. Например, ряд $1-1+1-\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$ имеет ограниченные частичные суммы $|S_n|<2$, но, как мы показали в пункте 1.1. Пример 2, этот ряд расходится.

8.1.4. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Среди бесконечных рядов простейшим является класс знакопостоянных рядов, т.е. таких рядов, все члены которых имеют постоянные знаки. В силу свойства 3) из пункта 1.2, достаточно ограничиться изучением рядов с положительными (точнее, неотрицательными) членами.

Теорема 1

Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \geq 0)$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм ряда была ограничена.

Доказательство

<u>*Необходимость:*</u> Доказана в теореме 1 *(1-ый необходимый признак)*.

<u>*Достаточность:*</u> Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ имеет неотрицательные члены, то $S_{n+1}-S_n=u_n\geq 0$. Откуда следует, что $S_{n+1}\geq S_n$ для любого $n\in N=\{1,2,\ldots\}$, т.е. последовательность частичных сумм не убывает и, по условию, ограничена. Тогда по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной функции она имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, а это и означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пример 1

Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}+n^{2}}$.

Решение

Члены ряда положительны и $\frac{1}{2^n+n^2}<\frac{1}{2^n}$ для любого n.

$$S_n=\frac{1}{2+1^2}+\frac{1}{2^2+2^2}+\frac{1}{2^3+3^2}+\ldots+\frac{1}{2^n+n^2}<$$

$$<\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}_{\text{геометрическая прогрессия}}<\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots}_{\substack{\text{бесконечно убывающая}\\ \text{геометрическая прогрессия}}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Итак, последовательность S_n ограничена сверху числом 1 и возрастает, тогда по теореме 3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}+n^{2}}$ - сходится.

Теорема 2 *(1-ый признак сравнения)*

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ - два ряда с неотрицательными членами, причем члены первого, начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов второго: $u_n\le v_n$. Тогда:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

Доказательство

Из неравенства $u_n\le v_n$ следует, что для n-ых частичных сумм верно неравенство $\sum_{k=1}^{n}u_k\le\sum_{k=1}^{n}v_k$. Поэтому, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

сходится и имеет сумму S, то $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq S$ для любого $n \in N$ и в силу теоремы 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то последовательность его частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} u_k$ неограничена и в силу неравенства $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k$ тем более неограничена последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, откуда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Для практического применения признака сравнения необходимо иметь некоторый набор уже изученных рядов, с которыми сравнивать изучаемый ряд. Нами уже исследованы:

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ (геометрический) сходится при $|q| < 1$ и всяком a.
2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ - сходится.
3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический) расходится.
4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (обобщённый гармонический) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$ (доказательство будет позднее).

Пример 2

Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$.

Решение

Сравним заданный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Обозначим: $u_n=\frac{1}{2n(2n+1)}$, $v_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Для любого n верно $0\le u_n\le v_n$, а т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$ сходится.

Пример 3

Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\ln(n+1)}$.

Решение

Этот ряд сходится, что следует из сравнения его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ (геометрический, $|q|<1$)

$$\frac{1}{3^n\ln(n+1)}<\frac{1}{3^n}\text{, для любого } n\ge 2.$$

Пример 4

Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\sqrt{n}}$.

Решение

Сравним его с обобщенным гармоническим рядом при $p=\dfrac{1}{2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, который расходится. Т.к. $\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}$ также расходится.

Теорема 3 *(2-ой признак сравнения: предельный)*

Пусть даны два ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. Если: 1) существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=c>0$ $\left(c\neq 0, c\neq\infty\right)$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся или расходятся одновременно;

2) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$;

3) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

Доказательство (ограничимся случаем 1)

Из того, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=c>0$, по определению следует, что можно задать $\varepsilon>0$ такое, что $c-\varepsilon>0$ и справедливо неравенство

$$c-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<c+\varepsilon \text{, для любого } n\in N,$$

где N - некоторое натуральное число зависящее от ε.

Так как $v_n>0$, то последнее соотношение равносильно неравенству

$$(c-\varepsilon)\cdot v_n<u_n<(c+\varepsilon)\cdot v_n \text{, для любого } n\in N.$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, то сходится в силу свойства 3 и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c+\varepsilon)\cdot v_n$, а в силу свойства 1 ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(c+\varepsilon)\cdot v_n$. Поэтому по 1-ому признаку сравнения из условия $(c-\varepsilon)\cdot v_n<u_n<(c+\varepsilon)\cdot v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=N}^{\infty}u_n$ и, следовательно, по свойству 1 сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Аналогично сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c-\varepsilon)\cdot v_n$ и, следовательно, ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

Точно также доказывается, что из расходимости одного ряда вытекает расходимость другого.

Пример 5

Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+3a}+\ldots+\frac{1}{1+na}+\ldots \quad (a>0).$$

Решение

Сравним данный ряд с гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Выпишем общие члены этих рядов

$$u_n=\frac{1}{1+na} \text{ и } v_n=\frac{1}{n},$$

и рассмотрим предел их отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+na}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+na}=\frac{1}{a}\neq 0.$$

Следовательно, исходный ряд расходится.

Пример 6

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

Решение

Сравним этот ряд с обобщенным гармоническим рядом при $p=2$, т.е. с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится. Рассмотрим предел отношения общих членов этих рядов: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$ (мы воспользовались здесь 1-ым замечательным пределом $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 4 «ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ»)). Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

При использовании признаков сравнения полезно использовать главные части (см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 4 «ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ»).

Теорема 4 *(признак Даламбера)*

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами $u_n > 0$, существует предел отношения последующего члена ряда (u_{n+1}) к предыдущему (u_n): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то

1) при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится (в частности $l = 0$);

2) при $l > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится (в частности $l = \infty$);

3) при $l = 1$ вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ остается нерешенным.

Доказательство

1) Пусть $l < 1$, в силу определения предела всегда можно выбрать такое число N, что при всех $n > N$ будет справедливо неравенство: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon = \rho_1$, где $\varepsilon > 0$ берется настолько малым, чтобы $\rho_1 = l + \varepsilon$ оставалось меньше 1. Тогда

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < \rho_1,\ \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < \rho_1,\ \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < \rho_1,\ \ldots .$$

Откуда следует, что

$$u_{N+1} < \rho_1 \cdot u_N\,;$$

$$u_{N+2} < \rho_1 \cdot u_{N+1} < \rho_1^{\,2} \cdot u_N\,;$$

$$u_{N+3} < \rho_1 \cdot u_{N+2} < \rho_1^{\,3} \cdot u_N\,;$$

$$\ldots$$

Из этих неравенств следует, что члены ряда $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots = r_N$, представляющего собой остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ после N-го члена, меньше соответствующих членов геометрического ряда $\rho_1 \cdot u_N + \rho_1^{\,2} \cdot u_N + \rho_1^{\,3} \cdot u_N + \ldots$ (со знаменателем $\rho_1 < 1$). Так как ряд $\rho_1 \cdot u_N + \rho_1^{\,2} \cdot u_N + \rho_1^{\,3} \cdot u_N + \ldots$ сходится, то сходится и остаток r_N (по 1-ому признаку сравнения). Поскольку r_N получен из исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ путем отбрасывания конечного числа N первых членов $u_1, u_2, \ldots, u_N$, то по свойству 1 из пункта 1.2 сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) Если же $l > 1$, тогда можно выбрать такое N, что при всех $n \geq N$ будет справедливо неравенство: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < l - \varepsilon = \rho_1$, где ε берется столь малым, что ρ_1 остается большим 1.

Тогда каждый последующий член ряда будет больше предыдущего: $u_{n+1} > \rho_1 \cdot u_n > u_n > 0$ и поскольку все они положительны $\left(u_n > 0\right)$, то общий член ряда не стремится к нулю. Таким образом не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и значит ряд расходится.

3) Если $l = 1$, то признак Даламбера не применим и для установления сходимости или расходимости ряда нужно применять другие признаки сходимости.

Пример 7

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$.

Решение

Выпишем n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда: $u_n = \frac{n^3}{2^n}$,

$u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ и выпишем их отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\cdot\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot\cancel{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right] = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ сходится.

Пример 8

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}$.

Решение

$$u_n = \frac{5^n}{n},\ u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{n+1} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot 5^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{5^n}\cdot 5\cdot n}{(n+1)\cdot\cancel{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\left[5\cdot\frac{n}{n\cdot\left(1+1/n\right)}\right] = 5 > 1\ ,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ расходится.

Признак Даламбера незаменим для рядов, члены которых содержат факториал.

Пример 9

Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(n+1)^n}$.

Решение

Так как $a_n=\frac{5^n n!}{(n+1)^n}$, $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}$, то:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)!(n+1)^n}{5^n n!(n+2)^{n+1}}=5\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+2)^n(n+2)}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n=5\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}=\frac{5}{e},\text{ так как}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-n}=-1.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5}{e}>1$, то по признаку Даламбера ряд расходится.

Теорема 5 *(Радикальный признак Коши)*

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то

1) при $q<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится;

2) при $q>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится;

3) при $q = 1$ вопрос о сходимости или расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ остается нерешенным.

(без доказательства)

Пример 10

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Решение

$$u_n = \frac{1}{n^n}, \quad \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \quad \Rightarrow$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится.

Пример 11

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Решение

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

тогда для данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ признак Коши не решает вопрос о сходимости.

Очевидно, что $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ (по второму замечательному пределу $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (см. компендиум по дисциплине «Математика», Тема 4 «ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ»)).

Для данного ряда не выполняется необходимый признак сходимости, поэтому он расходится.

Теорема 6 *(Интегральный признак Маклорена-Коши)*

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ члены которого положительны и не возрастают $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$. Пусть дана функция $f(x)$, которая определена, непрерывна, не возрастает на промежутке $x \in [1; +\infty)$ и

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n, \ldots$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

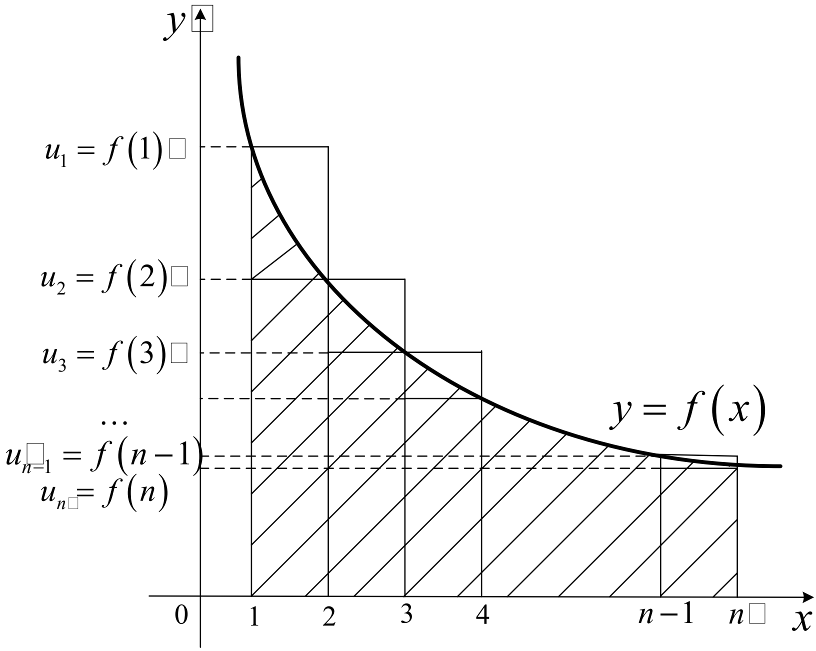
Доказательство

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, с основанием от $x = 1$ до $x = n$, где n произвольное положительное целое число (рис.1). Обозначим её площадь через I_n. Очевидно, что $I_n = \int_1^{n} f(x)dx$.

Отметим целые точки основания $x = 1$, $x = 2$, $\ldots$, $x = n$. Рассмотрим две ступенчатые фигуры. Одна из них (“входящая”) имеет площадь $f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = S_n - u_1$, а вторая (“выходящая”) площадь - $f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = S_n - u_n$, где $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Из чертежа ясно, что $S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n \Leftrightarrow \begin{cases} S_n < I_n + u_1 \\ S_n > I_n + u_n \end{cases}$.

Так как по условию $f(x) \geq 0$, то I_n возрастает с ростом n.



Возможны 2 случая:

1) $I = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ - сходится $\Leftrightarrow$ $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$ существует. Так как I_n возрастает, то $I_n < I$. Поскольку $S_n < I_n + u_1$, то для любого n: $S_n < I + u_1$. Следовательно, частичные суммы S_n ограничены и на основании теоремы 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится.

2) Интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ расходится $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = +\infty$ и в силу того, что $S_n > I_n + u_n$, последовательность S_n тоже неограниченно возрастает, из чего следует, что ряд расходится.

Пример 12

Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p \in R$.

Решение

Здесь $u_n = \frac{1}{n^p}$. Положим $f(x) = \frac{1}{x^p}$, где $x \in [1;+\infty)$. Представляет интерес лишь случай, когда $p > 0$, так как если $p < 0$, то $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = +\infty$, а если $p = 0$, то $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ и в силу необходимого признака ряд расходится. При $p > 0$ $f'(x) = -p\cdot\frac{1}{x^{p+1}} < 0$ для любого $x \in [1;+\infty)$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ не возрастает, кроме того она непрерывна.

По признаку Маклорена-Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ и интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ сходятся или расходятся одновременно.

$\underline{\underline{p > 1}}$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{n}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}\left(n^{1-p}-1\right)\right) = \frac{1}{1-p}\left(\lim_{n\to+\infty} n^{1-p}-1\right) = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1},$$

т.е. интеграл сходится, а следовательно, сходится и ряд.

$\underline{\underline{0 < p < 1}}$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}\left(\lim_{n\to+\infty} n^{1-p}-1\right) = +\infty - \frac{1}{1-p} = +\infty$$

интеграл расходится.

$\underline{\underline{p=1}}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{n\to+\infty} \ln x \Big|_1^n = \lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$$

интеграл расходится.

Пример 13

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p(\alpha n)}$, где $p \in R$.

Решение

Положим $f(x) = \frac{1}{n \cdot \ln^p(\alpha n)}$. Рассмотрим интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^p(\alpha x)}$. Сделаем замену $\ln(\alpha x) = t$. Тогда $\frac{\cancel{\alpha}}{\alpha \cancel{x}} dx = dt$.

Получим интеграл $\int_{\ln(\alpha a)}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p(\alpha n)}$ можно использовать для сравнения с исследуемым рядом. При этом следует иметь в виду, что при $n \to \infty$ $\ln(\alpha n + c) \sim \ln(\alpha n)$.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \cdot \ln^3(3n+5)}$ сходится, поскольку $u_n = \frac{1}{(2n+3) \cdot \ln^3(3n+5)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n \cdot \ln^3(3n)}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \cdot \ln^3(3n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3(3n)}$ сходится, т.к. $p = 3 > 1$.

8.1.5. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница

Определение

Ряд, у которого любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки, называется ***знакочередующимся***.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n ,$$

где $u_n > 0$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Примером знакочередующегося ряда служит геометрическая прогрессия с отрицательным знаменателем.

Теорема *(Признак Лейбница)*

Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$, где $u_n > 0$, монотонно убывают, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ и общий член ряда u_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится (в смысле определения 3 из пункта 1.1).

Доказательство

Рассмотрим последовательность частичных сумм с чётными номерами

$$S_{2m} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{>0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{>0} + \ldots + \underbrace{(u_{2m-1} - u_{2m})}_{>0} .$$

Каждая скобка больше нуля, поэтому $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$.

Следовательно, последовательность S_{2m} - возрастает.

С другой стороны, S_{2m} можно переписать в виде

$$S_{2m}=u_1-\underbrace{(u_2-u_3)}_{>0}-\underbrace{(u_4-u_5)}_{>0}-\ldots-\underbrace{(u_{2m-2}-u_{2m-1})}_{>0}-\underbrace{u_{2m}}_{>0}.$$

Легко увидеть, что $S_{2m}<u_1$. Таким образом последовательность $\{S_{2m}\}$ возрастает и ограничена сверху, значит существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$.

Теперь рассмотрим последовательность частичных сумм с нечётными номерами

$$u_{2m+1}=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2m-1}-u_{2m}+u_{2m+1}.$$

Очевидно, что $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}$. Из этого следует, что

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}\left(S_{2m}+u_{2m+1}\right)=\lim_{m\to\infty}S_{2m}+\lim_{m\to\infty}u_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=S,$$

т.к. $\lim\limits_{m\to\infty}u_{2m+1}=0$ по условию теоремы.

Из того, что $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$ и $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m+1}=S$ (по определению 3 пункта 1.1) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Остаток ряда $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$ тоже представляет собой знакочередующийся ряд

$$r_n=\pm\left(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\ldots\right).$$

Очевидно, что

$$|r_n|=u_{n+1}-\underbrace{\left(\underbrace{(u_{n+2}-u_{n+3})}_{>0}+\underbrace{(u_{n+4}-u_{n+5})}_{>0}+\ldots\right)}_{>0}.$$

Следовательно справедлива оценка $|r_n|<u_{n+1}$, т.е. модуль остатка сходящегося знакочередующегося ряда не превосходит модуля первого отброшенного члена.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

В признаке Лейбница указаны три условия, одновременного выполнения которых достаточно для сходимости исследуемого ряда:

1) знакочередуемость;
2) монотонное убывание;
3) стремление к нулю общего члена.

Каждое из этих условий является существенным и подлежит проверке.

Пример 1

Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, который называется рядом Лейбница.

Решение

Проверим условия теоремы Лейбница:

1) ряд знакочередующийся (выполнено);

2) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$, т.е. абсолютные величины членов убывают (выполнено);

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (выполнено).

Все три условия теоремы Лейбница выполнены,

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится.

Пример 2

Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\ldots.$$

Решение

Проверим условия теоремы Лейбница:

1) ряд знакочередующийся (выполнено);

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ (выполнено),

но не выполнено условие 2) теоремы Лейбница. Этот ряд расходится. Так как ряд

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)$$

расходится, как гармонический ряд.

8.1.6. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Определение 1

Знакопеременным называется ряд, членами которого являются действительные числа произвольного знака.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Пусть $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ знакопеременный ряд. Информацию об этом ряде можно получить, если рассматривать ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$, членами которого являются модули членов знакопеременного ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$.

Определение 2

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов. Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то исходный ряд называется условно (неабсолютно) сходящимся.

Теорема *(Связь абсолютной сходимости и сходимости)*

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится, если сходится ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из модулей его членов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Данная теорема утверждает, что из абсолютной сходимости знакопеременного ряда следует его обычная сходимость. Обратное, вообще говоря, неверно.

Например, ряд Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится, а ряд из модулей его членов – гармонический $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходится. Следовательно, ряд Лейбница сходится условно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Чтобы установить абсолютную сходимость знакопеременного ряда, используют все признаки сходимости рядов с неотрицательными членами, заменив всюду в формулировках общий член ряда u_n его модулем $|u_n|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4

Абсолютно сходящиеся ряды подчиняются обычным законам арифметики и обладают некоторыми основными свойствами конечных сумм.

Свойство 1 *(переместительный закон)* Сходимость и сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяются при произвольной перестановке его членов.

Свойство 2 Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно перемножать по правилу умножения многочленов. Получившийся при этом ряд тоже будет абсолютно сходящимся.

Для не абсолютно (условно) сходящихся рядов указанные свойства, вообще говоря, места не имеют.

Пример 1

Возьмём ряд Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, который, как известно, сходится и обозначим его сумму через S $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=S$. Переставим слагаемые так, чтобы за каждым положительным стояли два отрицательных $\underbrace{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}+\ldots$. Сгруппируем слагаемые, отмеченные скобками. Получим $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=$ $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S$. От перестановки членов сумма условно сходящегося ряда изменилась.

Пример 2

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(3n-2)}{5^{n}}$.

Решение

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)}{5^{n}}$. Исследуем сходимость этого ряда с помощью признака Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)\cdot 5^{n}}{5^{n+1}\cdot(3n-2)}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{1}{5}<1.$$

Абсолютный ряд сходится, и в силу достаточного признака сходимости знакопеременных рядов ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(3n-2)}{5^{n}}$ сходится абсолютно.

Пример 3

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)}{n^{2}+n+1}$.

Решение

Рассмотрим абсолютный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$. Используя предельный признак сравнения, сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n}{n^2+n+1} = 1 .$$

Так как предел конечен, то абсолютный ряд так же как и гармонический ряд, расходится. Следовательно, абсолютной сходимости нет.

Проверим условия теоремы Лейбница:

1) ряд знакочередующийся (выполнено);

2) $\frac{2}{3} > \frac{3}{7} > \frac{4}{13} > \ldots$, т.е. абсолютные величины членов ряда убывают (выполнено);

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1} = 0$ (выполнено).

Все три условия теоремы Лейбница выполнены, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2+n+1} \text{ сходится,}$$

а так как абсолютной сходимости нет, то заданный ряд сходится условно.

Пример 4

Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n}$. Если ряд сходится, то укажите тип сходимости.

Решение

Абсолютный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}$ расходится по признаку сравнения, так как $\frac{\ln(n+1)}{n}>\frac{\ln 2}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n}$ расходятся.

По признаку Лейбница:

1) ряд знакочередующийся (выполнено);

2) $a_n=\frac{\ln(n+1)}{n}$, $a_{n+1}=\frac{\ln(n+2)}{n+1}$. Докажем, что $a_{n+1}<a_n$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$. Поскольку ее производная

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot x-\ln(x+1)}{x^2}=\frac{x(1-\ln(x+1))-\ln(x+1)}{x^2(x+1)}<0$$

при $x\geq 1$, то функция $f(x)$ убывает при $x\geq 1$. Члены ряда a_n и a_{n+1} являются значениями этой функции при $x_1=n$ и $x_2=n+1$. Так как $x_2>x_1$, то $a_n>a_{n+1}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

(выполнено).

По признаку Лейбница ряд сходится и сходимость условная.

8.1.7. Вычисление суммы числового ряда с заданной точностью

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то практически можно сказать, что сумма такого ряда равна его частной сумме S_n с достаточно большим номером. Следовательно, при приближённом вычислении суммы ряда необходимо установить, сколько нужно взять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, чтобы остаток ряда $r_n = S - S_n$

был по модулю меньше некоторого наперёд заданного числа $\varepsilon > 0$. Число ε называется точностью вычислений

$$|r_n| = |S - S_n| \le \varepsilon \text{ при } n \ge N.$$

Эту задачу удаётся решить, если для абсолютной величины остатка r_n будет получена оценка сверху $|r_n| < \alpha_n$, где α_n есть некоторая функция от n, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$. Искомое значение N получим, решая неравенство $\alpha_n \le \varepsilon$ относительно n.

Имеют место следующие оценки остатка ряда r_n для различных классов рядов:

- Для рядов с положительными монотонно убывающими членами $u_n = f(n)$, удовлетворяющих условиям интегрального признака Маклорена-Коши

$$r_n \le \int_{n}^{+\infty} f(x)dx.$$

- Для знакочередующихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, удовлетворяющих условиям признака Лейбница: $|r_n| < u_{n+1}$ $(\alpha_n = u_{n+1})$.

- Для абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого меньше по абсолютной величине соответствующих членов сходящейся геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ $(a > 0; 0 < q < 1)$

$$\left|r_n\right| < \frac{a \cdot q^n}{1-q} \quad \left(\alpha_n = \frac{a \cdot q^n}{1-q}\right).$$

Действительно,

$$\left|r_n\right| = \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\right| < \left|u_{n+1}\right| + \left|u_{n+2}\right| + \ldots <$$

$$< a \cdot q^n + a \cdot q^{n+1} + a \cdot q^{n+2} + \ldots = \frac{a \cdot q^n}{1-q}.$$

Пример 1

Сколько нужно взять членов ряда $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \ldots$, чтобы вычислить его сумму с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Решение

Ряд знакочередующийся, члены его по абсолютной величине убывают, общий член стремится к нулю, т.е. ряд удовлетворяет всем условиям признака Лейбница. Поэтому на основании оценки $\left|r_n\right| < u_{n+1}$ имеем

$$\left|r_n\right| < \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Для вычисления суммы этого ряда с точностью $\varepsilon = 0.001$ достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq 0.001.$$

Из последнего неравенства получаем $(n+1)^2 \geq 1000$, из этого следует, что $n \geq 31$ $(N = 31)$.

Пример 2

Сколько нужно взять членов ряда $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, чтобы вычислить его сумму с точностью $\varepsilon=0.001$.

Решение

По формуле $r_n<\int_n^{+\infty}f(x)dx$ находим оценку $r_n<\int_n^{+\infty}f(x)dx=\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx=\frac{1}{3n^3}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{3n^3}\le 0.001$ или $n\ge 7$ $(N=7)$.

8.2. Функциональные ряды

8.2.1. Основные понятия

Определение 1

Функциональным рядом называется ряд, членами которого являются функции одной или нескольких переменных, определённые на некотором множестве.

Например, ряд, члены которого есть функции одной переменной x на замкнутом промежутке $[a;b]$, можно записать так: $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Сумма первых n членов вида

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$$

называется n-ной частичной суммой данного функционального ряда.

При каждом фиксированном $x=x_0$ из области определения функций $u_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

становится числовым рядом

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0).$$

В зависимости от x_0 числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$$

может оказаться сходящимся или расходящимся. Если этот ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд сходится в точке x_0.

Определение 2

Множество всех значений x_0 из области определения функционального ряда

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

при которых числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$$

сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

Областью сходимости функционального ряда может быть числовое множество произвольной структуры. В большинстве случаев мы будем иметь дело с рядами, у которых область сходимости – промежуток (замкнутый или открытый, конечный или бесконечный).

ЗАМЕЧАНИЕ

Сходимость ряда $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots = =\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ в точке $x=x_0$ может быть ***условной*** или ***абсолютной***.

Очевидно, что в области сходимости ряда $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ его n-ая частная сумма, сумма ряда и n-ый остаток представляют собой функции от x. Обозначим их через $S_n(x)$, $S(x)$, $r_n(x)$. Эти функции связаны соотношениями

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x);$$

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x).$$

Сумма функционального ряда $S(x)$, понимаемая как функция, в принципе ничем не отличается от функций получаемых каким-нибудь другим способом. В частности, можно ставить вопрос о её непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т.д.

Можно интересоваться также тем, какие известные функции получаются в виде сумм функциональных рядов и как находить ряды, у которых суммами были бы заданные функции. Изучение этих и подобных вопросов и составляет содержание раздела «Функциональные ряды».

Пример 1

Ряд $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$ при каждом фиксированном x представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{x}{2}$. Следовательно, он сходится при $\left|\frac{x}{2}\right|<1$

или $|x|<2$, т.е. его область сходимости открытый промежуток $(-2;2)$.

Известны формулы для суммы этого ряда

$$S(x)=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2-x},$$

и его частичная сумма $S_n(x)=\dfrac{\frac{x}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{x}{2}}$.

Тогда остаток вычисляется по формуле

$$r_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{2}}.$$

Пример 2

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(x+2\pi k)$ сходится лишь при $x=\pi k$, где $k\in Z$, так как только при этих x общий член $\sin(x+2\pi k)=0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(x+2\pi k)=0$.

Если $x\neq\pi k$, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(x+2\pi k)\neq 0$ и ряд расходится. Значит в данном случае область сходимости есть множество точек вида: $\{x \mid x=\pi k, k\in Z\}$ (рис.2).

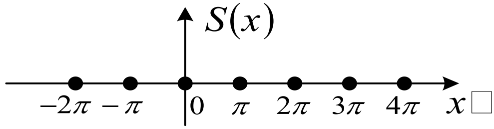


Рис.2.

Пример 3

Область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}$ выясняется сразу, если заметить, что $\left|\frac{\cos nx}{3^n}\right| \le \frac{1}{3^n}$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}$ сходится абсолютно при любом $x \in (-\infty;+\infty)$.

Область сходимости ряда промежуток $(-\infty;+\infty)$.

Пример 4

Рассмотрим ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-1+\sin x}$. Для любого $x \in R$ $\frac{1}{n-1+\sin x} \ge \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как гармонический, в котором отброшены 2 первых члена. Таким образом область сходимости данного ряда – пустое множество $\varnothing$.

Пример 5

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$.

Решение

$$S_n(x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \ldots + x^{n-1}(1-x) =$$

$$= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^{n-1} - x^n = 1 - x^n .$$

Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Поэтому $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$, т.е. ряд сходится и имеет сумму $S(x) = 1$.

Если $|x|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty$, т.е. при $|x|>1$ ряд расходится.

Если $x=1$ все члены ряда равны нулю и он сходится.

Если $x=-1$, то исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2 = 2-2+2-\dots$ и является расходящимся.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $(-1;1]$. Сумма ряда: $S(x)=\begin{cases}1 & при \quad x\in(-1;1)\\ 0 & при \quad x=1\end{cases}$ (рис.3).

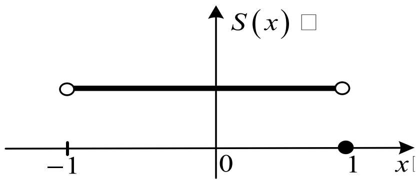


Рис.3.

8.2.2. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов

При изучении функциональных рядов интересуются не только сходимостью, но и функциональными свойствами их сумм. Это значит, что, мы должны дать ответ на важный вопрос: сохраняются ли для функционального ряда следующие основные свойства суммы конечного числа функций:

1. сумма конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция;
2. сумма конечного числа дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция и производная суммы равна сумме производных слагаемых;
3. сумма конечного числа интегрируемых функций есть интегрируемая функция и интеграл от суммы равен сумме интегралов от каждого из слагаемых.

В общем случае для бесконечного числа слагаемых ответы на эти вопросы отрицательны.

Приведём пример ряда, который нельзя почленно дифференцировать. Ряд

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2^n\pi x\right)}{2^n}$$

сходится, т.к. $\left|\frac{\sin\left(2^n\pi x\right)}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$ и каждый член его есть дифференцируемая функция, причём $u_n'(x)=\left(\frac{\sin\left(2^n\pi x\right)}{2^n}\right)'=\pi\cos\left(2^n\pi x\right)$. Однако ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(2^n\pi x\right)$ расходится, т.к. его общий член при $n\to\infty$ к нулю не стремится. Поэтому равенство $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ не имеет смысла.

Ниже будет выяснено, каким условиям должен удовлетворять функциональный ряд, чтобы для него были справедливы перечисленные свойства суммы конечного числа функций.

Определение 1

Последовательность функций $\left\{S_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной функции $S(x)$ в некоторой области D (например, $D=[a;b]$ или $D=(a;b)$), если для всех $x_0\in D$ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=S(x_0)$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ и $x_0\in D$ существует $N_{x_0,\varepsilon}$ (зависящее от ε и x_0) такое, что для каждого $n>N_{x_0,\varepsilon}$ выполняется неравенство $\left|S_n(x_0)-S(x_0)\right|<\varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Подчеркнём, что в определении 1 номер $N_{x_0,\varepsilon}$ зависит от выбора точки $x_0 \in D$.

Определение 2

Последовательность функций $\left\{S_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной функции $S\left(x\right)$ равномерно в некоторой заданной области D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε (зависящий только от ε), такой что при любом $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство: $\left|S_n\left(x_0\right) - S\left(x_0\right)\right| < \varepsilon$ каково бы ни было $x_0 \in D$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Подчеркнём, что в отличие от предыдущего определения, здесь утверждается существование N_ε в равной мере обслуживающего все значения $x_0 \in D$.

Определение 3

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$ называется сходящимся равномерно в некоторой области D, если в указанной области последовательность его частичных сумм $S_1\left(x\right), S_2\left(x\right), \ldots, S_n\left(x\right), \ldots$ сходится равномерно к своей предельной функции $S\left(x\right)$.

Теорема 1 *(Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)*

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$, каждый член которого является функцией, определённой на замкнутом промежутке $\left[a;b\right]$, сходится равномерно на этом промежутке, если существует сходящийся положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, такой, что $|u_n(x)| < c_n$ для любого $x \in [a;b]$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 2 *(О непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций)*

Пусть все члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке $[a;b]$ и составленный из них ряд сходится на $[a;b]$ равномерно.

Тогда суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывная на промежутке $[a;b]$ функция.

Теорема 3 *(О почленном интегрировании рядов)*

Если функциональный ряд, составленный из непрерывных функций, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на промежутке $[a;b]$ и имеет суммой функцию $S(x)$, то функциональный (относительно переменной y) ряд, составленный из интегралов по промежутку $[\alpha; y]$

$$\int_{\alpha}^{y} u_1(x)\,dx + \int_{\alpha}^{y} u_2(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{y} u_n(x)\,dx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{y} u_n(x)\,dx$$

(здесь $a \le \alpha \le y \le b$) также сходится равномерно на промежутке $[a;b]$ и имеет суммой функцию $\int_{\alpha}^{y} S(x)\,dx$.

Теорема 4 *(О почленном дифференцировании рядов)*

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a;b]$, имеет сумму $S(x)$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$, и пусть его члены имеют на этом промежутке непрерывные производные, причём составленный из этих производных ряд $u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится на $[a;b]$ равномерно и имеет сумму $\sigma(x)$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sigma(x)$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a;b]$ равномерно, и производная его суммы равна сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

$S'(x) = \sigma(x)$.

Пример 1

Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ равномерно сходится при $x \in [-1;1]$.

Решение

Так как при любом $x \in [-1;1]$ выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n^{3/2}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (обобщённый гармонический ряд при $p = \frac{3}{2} > 1$), то исходный ряд, по теореме 1, сходится равномерно.

Пример 2

Исследовать непрерывность суммы сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2\cdot x^2}$.

Решение

Каждый член данного ряда $u_n(x)=\frac{1}{n^4+x^2\cdot n^2}$ есть непрерывная для любого $x\in(-\infty;+\infty)$ функция. По теореме 1, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2\cdot n^2}$ сходится равномерно, т.к. $\frac{1}{n^4+x^2\cdot n^2}\le\frac{1}{n^4}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится. Тогда по теореме 2, сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2\cdot n^2}$ есть непрерывная для любого $x\in R$ функция.

Пример 3

Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$?

Решение

Каждый член данного ряда $u_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}$ есть функция, непрерывная для любого $x\in R$. По теореме 1 этот ряд сходится равномерно на всей действительной оси, т.к. $\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Поэтому, согласно теореме 3, данный ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку $[\alpha;y]\subset R$. Полагая, в частности $\alpha=0$ и интегрируя по промежутку $[0;y]$, получим

$$\int_0^y\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y\frac{1}{n^2+x^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}arctg\frac{x}{n}\Bigg|_0^y=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}arctg\frac{y}{n}.$$

Пример 4

Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$?

Решение

Каждый член данного ряда $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n^3}$ есть функция, дифференцируемая для любого $x\in R$, причём $u_n'(x)=\frac{\cos nx}{n^2}$. Составим ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. Этот ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса, т.к. $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ и члены его $u_n'(x)=\frac{\cos nx}{n^2}$ непрерывные функции. Поэтому по теореме 4 исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ можно почленно дифференцировать, причём $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)_x'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

8.2.3. Степенной ряд и его свойства

Важнейшим классом функциональных рядов являются степенные ряды.

Определение

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

где $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательность действительных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ называют ещё рядом по степеням $(x-a)$.

Рассмотрим вопрос о структуре области сходимости степенного ряда.

1) Всякий степенной ряд сходится при $x = a$, т.к. тогда $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = a_0$.
2) Существуют степенные ряды, которые сходятся только при $x = a$. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x \cdot n)^n$ сходится только при $x = 0$.

   Действительно, пусть $x_0 \neq 0$ - любое число, тогда при $n \to \infty$ величина $x_0 \cdot n$, начиная с некоторого номера n удовлетворяет неравенству: $|n \cdot x_0| > 2$, то есть общий член ряда к нулю не стремится и в силу необходимого признака ряд при $x_0 \neq 0$ расходится.
3) Существуют степенные ряды, сходящиеся при любом значении $x \in R$. В качестве примера рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$. Зафиксируем произвольное $x = x_0$, где $x_0 \in R$.

   Очевидно, что найдётся такое N, что для любого $n > N$ $\left|\frac{x_0}{n}\right| < \frac{1}{2}$, а тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_0}{n}\right)^n$ можно сравнить со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ и убедиться, что исходный ряд сходится абсолютно при любом значении x.

4) Существуют степенные ряды сходящиеся при одних значениях x и расходящиеся при других.

Вопрос о структуре области сходимости степенного ряда решает следующая теорема.

Теорема *(Теорема Абеля)*

Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n$ существует такое неотрицательное число $r\geq 0$, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n$ сходится, и притом абсолютно, при $\left|x-a\right|<r \Leftrightarrow x\in\left(a-r;a+r\right)$ и расходится при $\left|x-a\right|>r \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;a-r\right)\cup\left(a+r;+\infty\right)$.

Число r называется радиусом сходимости, а открытый промежуток $\left(a-r;a+r\right)$ интервалом сходимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Относительно поведения степенного ряда на границах промежутка сходимости, т.е. при $x=a+r$ и $x=a-r$ общих утверждений высказать нельзя. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(-r\right)^n$ могут сходиться или расходиться в зависимости от их конкретного вида.

Поэтому, принят следующий порядок отыскания области сходимости степенного ряда:

1) При помощи признаков Даламбера или Коши отыскивают промежуток сходимости степенного ряда, решая относительно x неравенства: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}\left(x\right)}{u_n\left(x\right)}\right|<1$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n\left(x\right)}<1$.

2) Исследуют сходимость ряда на концах промежутка сходимости, т.е. при $x = a + r$ и $x = a - r$.

Примеры

1). Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{x^n}\cdot x\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot\cancel{x^n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)} = 0 \ \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ сходится для любого } x \in R.$$

2). Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 10^n}$.

Ищем промежуток сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n\cdot 10^n}{(n+1)\cdot x^n\cdot 10^{n+1}}\right| = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right| = \frac{|x|}{10} < 1,$$

тогда $|x| < 10 \Rightarrow \ x \in (-10;10)$ ($r = 10$ радиус сходимости).

Исследуем сходимость на границах:

$\underline{x=-10}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - ряд Лейбница – сходится условно.

$\underline{x=10}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n\cdot 10^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд - расходится.

Итак, область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$ промежуток $[-10;10)$.

3). Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n-1}}{n^3}$.

$$u_n = \frac{(x-3)^{2n-1}}{n^3};\ u_{n+1} = \frac{(x-3)^{2n+1}}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{2n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot(1-3)^{2n-1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^2\cdot \cancel{n^3}}{\cancel{n^3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\right| = (x-3)^2 < 1,$$

тогда $|x-3|<1 \Rightarrow$ промежуток сходимости $(2;4)$ ($r=1$ радиус сходимости).

$\underline{x=2}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n^3} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится как обобщённый гармонический ряд ($p=3>1$).

$\underline{x=4}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{2n-1}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится.

Итак, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n-1}}{n^3}$ сходится при $x\in[2;4]$.

Свойства степенных рядов

1. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ сходится равномерно на любом замкнутом промежутке $[\alpha;\beta]$, целиком лежащем в интервале сходимости $[\alpha;\beta]\subset(a-r;a+r)$.
2. Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ имеет промежуток сходимости $(a-r;a+r)$, тогда его можно почленно дифференцировать в этом промежутке, т.е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-a)^{n-1},$$ причём ряд в правой части имеет тот же интервал сходимости $(a-r; a+r)$.

Следствие

Сумма степенного ряда - бесконечно дифференцируемая функция (в промежутке сходимости).

3. Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ является непрерывной функцией в каждой точке его промежутка сходимости $(a-r; a+r)$.

4. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ можно почленно интегрировать по любому промежутку, принадлежащему промежутку сходимости, т.е. если $y \in (a-r; a+r)$, то $$\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(y-a)^{n+1}}{n+1},$$ причём ряд в правой части имеет тот же промежуток сходимости $(a-r; a+r)$.

8.2.4. Теоремы о коэффициентах степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена

Начиная с этого пункта, мы будем решать следующую задачу теории функциональных рядов: по заданной функции искать сходящийся степенной ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется разложением функции в степенной ряд.

Рассмотрим степенной ряд общего вида: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

Обозначим его сумму через $f(x)$.

Теорема (*О связи суммы степенного ряда и его коэффициентов)*

Если в некотором промежутке $(a-r;a+r)$ функция $f(x)$ есть сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, т.е. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, то коэффициенты этого ряда выражаются через $f(x)$ и число a следующим образом

$$a_0 = f(a), \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Доказательство

Известно, что в промежутке сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать, причём в результате получается ряд, имеющий тот же интервал сходимости, что и исходный. Последовательно дифференцируя $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, получим следующие равенства, справедливые для любого $x \in (a-r;a+r)$.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + n \cdot a_n (x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + \ldots + (n-1) \cdot n \cdot a_n (x-a)^{n-2} + \ldots$$

....

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (x-a) + \ldots$$

....

Полагая в написанных выше равенствах $x=a$, получим

$$f(a) = a_0, \ f'(a) = a_1, \ f''(a) = 1 \cdot 2 \cdot a_2,$$

$$f'''(a) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3, \ldots, \ f^{(n)}(a) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_n.$$

Откуда

$$a_0 = f(a), \ a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \ a_2 = \frac{f''(a)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \ \ldots, \ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ \ldots$$

Итак, если $f(x)$ - сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, то это записывают в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Определение

Пусть $f(x)$ некоторая бесконечно дифференцируемая в окрестности точки $x = a$ функция. Степенной ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

независимо от того сходится ли он и имеет ли своей суммой $f(x)$, называется ***рядом Тейлора*** для функции $f(x)$ в окрестности точки a.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

В частном случае, при $a = 0$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

принимает вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

и называется ***рядом Маклорена***.

Из доказанной теоремы вытекают следствия:

Следствие 1 *(О тождественном равенстве двух степенных рядов)*

Если суммы двух степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$ равны для любого $x\in(a-r;a+r)$, то коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a)$ в этих рядах тоже равны, т.е. $a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

Доказательство

Действительно, т.к. суммой рядов служит одна и та же функция $f(x)$, то по теореме: $\underbrace{a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\quad b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$.

$$\Downarrow$$

$$a_n=b_n$$

Следствие 2

Если сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ равна нулю в некотором промежутке $(a-r;a+r)$, то все его коэффициенты равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Следствие 1 можно трактовать как теорему единственности разложения функции в степенной ряд. Двух различных разложений в ряд по степеням $(x-a)$ в промежутке с центром в точке a функция $f(x)$ иметь не может.

8.2.5. Разложение функций в степенные ряды

В предыдущем пункте мы определили ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ для бесконечно дифференцируемой в окрестности точки $x=a$ функции $f(x)$. Установим теперь достаточные условия того, чтобы сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ совпадала с самой функцией $f(x)$. При доказательстве этих условий нам потребуется полученная ранее формула Тейлора (см. пункт 2.4.).

Вспомним, что если функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-r;a+r)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные до порядка $(n+1)$ включительно, то для любого x из этого промежутка имеет место формула Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

где функция

$$R_n(x)=(x-a)^{n+1}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

называется ***остаточным членом в форме Лагранжа*** (ξ - некоторое число, лежащее между a и x, т.е. если $x<a$, $x<\xi<a$, а если $x>a$, то $a<\xi<x$).

Теорема (*Необходимые и достаточные условия разложимости функции в степенной ряд)*

Для того, чтобы функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-r;a+r)$ являлась суммой составленного для неё ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы:

1) функция $f(x)$ имела производные всех порядков;
2) остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора $R_n(x)=(x-a)^{n+1}\cdot\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ стремился к нулю при $n\to\infty$ для любого $x\in(a-r;a+r)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Доказательство

Необходимость: Пусть $f(x)$ есть сумма её ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ на промежутке $(a-r;a+r)$, тогда условие 1) выполнено в силу следствия из свойства 2 степенных рядов (см. пункт 2.3).

Необходимость условия 2) легко показать. Действительно, т.к. $f(x)$ сумма ряда Тейлора, а

$$S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

его частная сумма, то по формуле Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)=$$
$$=S_n(x)+R_n(x).$$

Отсюда $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)-\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)-f(x)=0,$$

т.е. условие 2) выполнено.

Достаточность: Если $f(x)$ бесконечно дифференцируема на промежутке $(a-r;a+r)$ и в формуле Тейлора, составленной для этой функции, остаточный член $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ для любого $x \in (a-r;a+r)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x)-S_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$. А это и означает, что $f(x)$ есть сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Доказанная теорема показывает, что для исследования вопроса о разложимости функции в ряд Тейлора нужно исследовать поведение остаточного члена $R_n(x)$ при $n \to \infty$. Если для данного значения $x = x_0$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то сумма ряда Тейлора равна значению функции в точке x_0, т.е. $f(x_0)$. Если $R_n(x)$ не стремится к нулю, то ряд Тейлора либо расходится, либо его сумма при $x = x_0$ не совпадает с $f(x_0)$.

При разложении данной функции $f(x)$ в степенной ряд можно рекомендовать следующий порядок действий:

1) Найти производные $f'(x)$, $f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$.
2) Вычислить $f'(a)$, $f''(a), \dots, f^{(n)}(a), \dots$ и составить коэффициенты ряда: $a_0 = f(a)$, $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Затем формально составить ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ для данной функции.

3) Найти область сходимости полученного ряда.
4) Исследовать поведение остаточного члена $R_n(x)=(x-a)^{n+1}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ при $n\to\infty$ и установить, где полученный степенной ряд будет иметь заданную сумму $f(x)$.

8.2.6. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена

1. $f(x)=e^x$

Разложим указанную функцию в ряд Маклорена.

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=e^x,\ \ldots$$

$$f(0)=e^0=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=1,\ \ldots,$$

следовательно $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$ и ряд Маклорена имеет вид

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Найдём область его сходимости. По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{x^n}\cdot x\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot\cancel{x^n}}\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Откуда следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится на всей числовой оси. Остаётся доказать, что этот ряд имеет суммой e^x, для чего достаточно установить, что $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Действительно, для нашего случая: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, где ξ лежит между 0 и x.

Множитель $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ можно рассматривать как $(n+1)$-ый член ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, поэтому $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Множитель e^{ξ} ограничен: если $x \geq 0$, то $e^{\xi} \leq e^x$; если $x < 0$, то $e^{\xi} < e^0 = 1$, поэтому $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Таким образом, сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ совпадает с e^x на всей оси, т.е.

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}.$$

2. $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = \left(\sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{IV}(x) = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0,$$

$$f^{V}(0)=1,\ \ldots,\ f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1},\ f^{(2n)}(0)=0.$$

Формальный ряд Маклорена для $f(x)=\sin x$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

По признаку Даламбера легко убедиться, что он сходится на всей оси.

Также как и для функции e^x можно показать, что предел его остаточного члена $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$. Поэтому на всей оси имеет место равенство

$$\boxed{\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}.$$

3. $f(x)=\cos x$

Так как ряд $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сходится на всей оси, то на всей оси его можно почленно дифференцировать. Поэтому

$$\cos x=(\sin x)'_{x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'_{x}.$$

Откуда

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\text{ где } x\in R.$$

4. $f(x)=(1+x)^m$, $m\in R$ (биномиальный ряд)

$$f(x) = (1+x)^m \Rightarrow f(0) = 1,$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0) = m,$$

$$f''(x) = m\cdot(m-1)\cdot(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0) = m\cdot(m-1),$$

…………………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(1+x)^{m-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1).$$

Поэтому ряд Тейлора для функции $(1+x)^m$ имеет вид:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2!}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (*).$$

На границах интервала сходимости ряд $(*)$ может сходиться или расходиться в зависимости от конкретного значения m. Если m натуральное число, то, начиная с $n = m+1$, все коэффициенты разложения равны нулю. В этом случае функцию $(1+x)^m$ называют ***биномом Ньютона***.

Пример

Разложить по степеням x функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Решение

$$f(x) = (1+x)^{-1/2}, \quad \left(m = -1/2\right).$$

По формуле $(*)$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^5+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2^n\cdot n!}x^n+\ldots.$$

Разложение справедливо при $-1<x<1$.

Прямой способ разложения функций в степенные ряды, который мы неоднократно применяли, связан с громоздкими вычислениями при нахождении производных и исследовании остаточного члена.

Существует ряд приёмов, позволяющих при разложении функции в степенной ряд избежать этих трудностей. Данный приём использует уже известные разложения, над которыми совершаются те или иные операции.

1. **Метод подстановки**

Пример 1

Разложить в степенной ряд функцию $y=e^{x^3}$.

Решение

Воспользуемся разложением $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, в котором подставим вместо x - x^3

$$e^{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^3\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}.$$

Пример 2

Разложить по степеням x функцию $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$.

Решение

Рассмотрим функцию $\varphi\left(t\right)=\frac{1}{1+t}$. Эту функцию можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q=-t$ и первым членом равным 1. Поэтому

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots.$$

Это разложение имеет место при $t\in(-1;1)$. Заменяя t на x^2, получим искомое разложение:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots, \text{ где } x\in(-1;1).$$

2. Разложение в степенной ряд методом дифференцирования и интегрирования

Пример 1

Разложить по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Решение

Данная функция есть производная от функции $\varphi(x)=-\dfrac{1}{1+x}$, для которой справедливо при $x\in(-1;1)$ разложение

$$-\frac{1}{1+x}=-1+x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^{n+1}x^n+\ldots.$$

Почленно дифференцируя написанный ряд, получим

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^{n+1}nx^n+\ldots,$$

где $x\in(-1;1)$.

Пример 2

Разложить по степеням x функцию $f(x)=arctgx$.

Решение

Заметим, что $arctgx=\int\limits_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ и воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,$$

которое проинтегрируем почленно. Получим

$$arctgx=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Эта формула справедлива при $-1<x\le 1$ (при $x=1$ условная сходимость).

ЗАМЕЧАНИЕ

Аналогично разложению функции $f(x)=arctgx$ в ряд Тейлора, можно получить разложение в ряд Тейлора и функции $f(x)=\ln(1+x)$. Разложение будет иметь вид

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

где ряд сходится при $-1<x\le 1$ (при $x=1$ условная сходимость).

(Разложение функции $f(x)=\ln(1-x)$ в ряд Тейлора может быть получено из разложения $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ путём замены $x=-x$.)

8.2.7. Приложения степенных рядов

1. **Приближённое вычисление значений функций**

Пример

Вычислить $\sin 1$ с точностью $\varepsilon=0.001$.

Решение

Полагая в формуле $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x = 1$ (в радианах), получим $\sin 1 = 1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \dfrac{1}{7!} + \ldots$. Ряд справа – знакочередующийся, члены которого убывают по модулю и стремятся к нулю с ростом n. Его остаток меньше первого отброшенного члена. Так как $\dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720} > 0.001$, а $\dfrac{1}{7!} = \dfrac{1}{5040} < 0.001$, то с точностью до 0.001, получим:

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0.842\,.$$

2. Приближённое вычисление интегралов

Пример

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x} dx$.

Решение

Соответствующий неопределённый интеграл $\int \dfrac{\sin x}{x} dx$ не может быть вычислен в элементарных функциях, т.е. представляет собой «неберущийся интеграл», следовательно, здесь нельзя применить формулу Ньютона Лейбница. Тем не менее, этот интеграл можно вычислить приближённо с помощью рядов.

Разделив почленно ряд для $\sin x$ на x, получим

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots.$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{7!}\int_0^1 x^6 dx + \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{5!}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{1}{7!}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 + \ldots = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots$$

Если ограничиться четырьмя членами, то

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} \approx 0.9461,$$

при этом погрешность не превосходит первого из отброшенного членов

$$\frac{1}{9\cdot 9!} = \frac{1}{3265920}.$$

3. Приближённое вычисление суммы ряда

Пример

Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} - \frac{1}{1215} + R_5,$$

где R_5 - сумма остатка ряда после пятого члена. Модуль пятого члена $a_5 = \frac{1}{1215} < \varepsilon$, а так как члены ряда убывают по модулю, то и все последующие члены меньше ε. Тогда по признаку Лейбница сумма остатка ряда $R_5 < a_5 < \varepsilon$. Следовательно, сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n} \approx -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} = -\frac{31}{108}$.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Дайте определение числового ряда.
2. Какой ряд называется сходящимся?

3. Какой ряд называется расходящимся?
4. Перечислите основные свойства сходящихся числовых рядов.
5. Как изменится сумма сходящегося числового ряда, если от него отбросить конечное число членов?
6. Сформулируйте необходимые признаки сходимости числовых рядов.
7. Что можно сказать о ряде, общий член которого не стремится к нулю?
8. Дайте формулировку признака Даламбера о сходимости ряда.
9. В чём заключается радикальный признак Коши?
10. Сформулируйте интегральный признак Маклорена-Коши.
11. Дайте определение знакочередующегося ряда.
12. В чём заключается признак сходимости Лейбница?
13. Дайте определение знакопеременного ряда.
14. В чём различие абсолютной и условной сходимости рядов?
15. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.
16. Дайте определение функционального ряда.
17. Дайте определение области сходимости функционального ряда.
18. Сформулируйте признак равномерной сходимости Вейерштрасса.
19. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.
20. Сформулируйте теорему об интегрировании рядов.
21. Сформулируйте теорему о дифференцировании рядов.
22. Дайте определение степенного ряда.
23. Дайте формулировку теоремы Абеля.
24. Перечислите свойства степенных рядов.
25. Сформулируйте теорему о связи суммы степенного ряда и его коэффициентов.
26. Какой ряд называется рядом Маклорена?
27. Дайте определение ряда Тейлора. Каковы необходимые и достаточные условия разложимости функции в степенной ряд?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение числового ряда и его сходимости. Общий член ряда. Частичная сумма ряда.
2. Исследование сходимости геометрического ряда.
3. Доказательство расходимости гармонического ряда.
4. Основные свойства числовых рядов. Остаток ряда.
5. Необходимые признаки сходимости числовых рядов.
6. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признак сравнения, предельный признак сравнения.
7. Признак Даламбера. Примеры.
8. Радикальный признак Коши и интегральный признак Маклорена-Коши сходимости положительных рядов.
9. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.
10. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость и связь между ними. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
11. Вычисление суммы числового ряда с заданной точностью.
12. Функциональный ряд. Основные определения. Область сходимости функционального ряда.
13. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся рядов. Признак Вейерштрасса.
14. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование равномерно сходящихся рядов.
15. Степенной ряд и его свойства. Теорема Абеля.
16. Теорема о коэффициентах степенного ряда и следствия из неё. Ряды Тейлора и Маклорена.
17. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена: e^{x}, $\sin x$.
18. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена: $\cos x$, $\left(1+x\right)^{m}$.
19. Разложение функций в степенные ряды (методы подстановки, дифференцирования и интегрирования).

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

8. Ряды. Часть 1. Числовые и функциональные ряды (8 часов)

24. Числовой ряд. Исследование положительных числовых рядов на сходимость (2 часа).
Л.1: 2730, 2737, 2738, 2739, 2743, 2754, 2758, 2762, 2764, 2768, 2780, 2784
25. Знакопеременный ряд. Абсолютная и условная сходимость. Признак абсолютной сходимости. Признак Лейбница (2 часа).
Л.1: 2790, 2791, 2792, 2793, 2794, 2795, 2796, 2797
26. Степенной ряд. Теорема Абеля. Структура области сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда (2 часа).
Л.1: 2802, 2803, 2805, 2806, 2809, 2811, 2817, 2819
27. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена. Биномиальный ряд. Приближенные вычисления (2 часа).
Л.1: 2841, 2843, 2844, 2857, 2864, 2867
Прием типового расчета по теме «Ряды».

7. Тест по теме 8: «ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

1. Как ведёт себя числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \infty$? Укажите номер верного ответа в таблице 3.

Таблица 3

1	2	3
сходится	расходится	ничего сказать нельзя

2. Заданы два числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Известно, что $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ и первый ряд сходится. Как ведёт себя второй ряд? Укажите номер верного ответа в таблице 4.

Таблица 4

1	2	3
сходится	расходится	ничего сказать нельзя

3. Какое из утверждений в таблице 5 является верным для числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{2n+5}$?

Таблица 5

1	2
сходится	расходится

4. Какое из утверждений в таблице 6 является верным для числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^{n}$?

Таблица 6

1	2
сходится	расходится

5. Какое из утверждений в таблице 7 является верным для числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{\left(5n^3+1\right)\ln\left(n+2\right)}$?

Таблица 7

1	2
сходится	расходится

6. Какое из утверждений в таблице 8 является верным для числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n}}$?

Таблица 8

1	2
сходится	расходится

7. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится. Тогда какое из утверждений в таблице 9 является верным для числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$?

Таблица 9

1	2	3
сходится условно	сходится абсолютно	может сходиться только абсолютно

8. Какое из утверждений в таблице 10 является верным для числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{1+3n^3}$?

Таблица 10

1	2	3
сходится абсолютно	расходится	сходится условно

9. Какое из утверждений в таблице 11 является верным для числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$?

Таблица 11

1	2	3
сходится абсолютно	расходится	сходится условно

10. На каком из промежутков степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ сходится абсолютно? Укажите номер верного ответа в таблице 12.

Таблица 12

1	2	3	4
$(-1;1)$	$(-2;2)$	$(-0,5;0,5)$	$[-2;2]$

11. На каком из промежутков степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n}$ сходится абсолютно? Укажите номер верного ответа в таблице 13.

Таблица 13

1	**2**	**3**	**4**
$(-1; 1)$	$[-6; 0)$	$(-6; 0)$	$[-1; 1]$

12. На каком из промежутков степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$ сходится равномерно? Укажите номер верного ответа в таблице 14.

Таблица 14

1	**2**	**3**	**4**
$(-1; 1)$	$[0; 2)$	$(0; 2)$	$[0; 2]$

13. На каком промежутке ряд Маклорена для функции $f(x) = e^{-x^2}$ сходится равномерно? Укажите номер верного ответа в таблице 15.

Таблица 15

1	**2**	**3**	**4**
$(-1; 1)$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$

14. Чему равна сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}$? Укажите номер верного ответа в таблице 16.

Таблица 16

1	**2**	**3**	**4**
$\cos x$	$\cos x^2$	$e^{x^2} - 1$	$\cos x^2 - 1$

15. Чему равна сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{(2n-1)!}$? Укажите номер верного ответа в таблице 17.

Таблица 17

1	**2**	**3**	**4**
$x^2 \sin x$	$\sin x^2$	$\sin x^2 - 1$	$x \sin x^2$

16. На каком промежутке ряд Маклорена для функции $f(x) = \cos x$ сходится равномерно? Укажите номер верного ответа в таблице 18.

Таблица 18

1	**2**	**3**	**4**
$(-1; 1)$	$[0; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$

17. На каком промежутке сходится ряд Маклорена для функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Является ли сходимость равномерной? Укажите номер верного ответа в таблице 19.

Таблица 19

1	**2**	**3**
равномерно на $(-\infty; +\infty)$	неравномерно на $(-\infty; +\infty)$	неравномерно на $(-\infty; +\infty)$ и равномерно на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

18. Если общий член u_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ при неограниченном возрастании n к нулю не стремится, то что можно сказать про заданный ряд? Укажите номер верного ответа в таблице 20.

Таблица 20

1	**2**	**3**
сходится	расходится	ничего сказать нельзя

19. На каком из промежутков степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ сходится абсолютно? Укажите номер верного ответа в таблице 21.

Таблица 21

1	**2**	**3**	**4**
$(-1; 1)$	$(-0,5; 0,5)$	$(-2; 2)$	$[-0,5; 0,5]$

20. Чему равна сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$? Укажите номер верного ответа в таблице 22.

Таблица 22

1	2	3	4
$\cos x - 1$	$\ln\left(1-x^2\right)$	$-0.5\ln\left(1-x^2\right)$	$\frac{e^{x^2}-1}{2}$

8. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Г.Н. Берман. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1985.
2. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
3. Б.П. Демидович. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. М.: Наука, 1972.
4. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Ч.1. М.: Наука, 1982.

Дополнительная

5. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II, М.: Высшая школа, 1999.
6. В.М. Дмитриев, Н.Н. Катрушенко. Ряды. Методические указания к практическим занятиям. Л.: Изд. ЛКИ, 1983.
7. К.В. Лопухов, А.К. Перцев. Ряды и их применение в приближённых вычислениях. Учебное пособие. Л.: Изд. ЛКИ, 1989.
8. Д.Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Ч.II, М.: Айрис-пресс, 2003.

9. ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

Таблица 23 Ответы к тесту

№ задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ответ	1	1	2	2	2	2	2	1	3	2
№ задания	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	3	3	3	4	1	3	3	2	2	3