Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)
Кафедра математики

Н.В.Васильева, С.Н. Леора

Тема 2. Векторная алгебра

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 22.151.5

УДК 512.942

Н.В .Васильева, С.Н. Леора. Высшая математика. Тема 2. Векторная алгебра. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с. 25.

Табл. 23 . Библиогр.: 5 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Векторная алгебра», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Н.В. Васильева, С.Н. Леора

Тема 2. Векторная алгебры

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Я.Ю. Ионченкова

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 1–го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 2. «Векторная алгебра».
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 1 - го СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план 1 семестр

№ темы	**Название темы**	**Распределение часов**				
		Всего	**Аудиторные занятия**			**Самостоятельная работа**
			Всего аудиторных	**Из них**		
				Лекции	**Практические занятия**	
1	Элементы линейной алгебры.	50	28	14	14	**22**
2	Векторная алгебра.	18	8	4	4	10
3	Аналитическая геометрия.	48	28	14	14	20
4	Теория пределов.	48	28	14	14	20
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1.	26	16	8	8	10
Всего за 1 семестр		190	108	54	54	82

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

2. Векторная алгебра (4 часов).

1. Линейное пространство R^3. Норма (модуль) вектора в пространстве R^3. Изображение векторов из R^3 направленными отрезками. Прямоугольная декартова система координат. Геометрический смысл скалярного произведения векторов в R^3. Геометрический смысл координат векторов в R^3. Линейные операции с векторами. Направляющие косинусы вектора. Коллинеарные векторы. Проекция вектора на ось и вычисление работы (2 часа).
2. Свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения через координаты перемножаемых векторов. Площадь параллелограмма и треугольника. Векторное произведение. Смешанное произведение векторов и его свойства. Компланарные векторы. Геометрический смысл смешанного произведения. Объем параллелепипеда и тетраэдра (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

2. Векторная алгебра

2.1 Векторы в пространстве R^3

Линейное векторное пространство R^3 образует множество матриц размерности 3x1 с обычными для матриц операциями сложения и умножения на скаляр. Каждый элемент $\vec{a}$ этого пространства (вектор) имеет вид:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ где } x, y, z \text{ - координаты вектора } \vec{a}.$$

Скалярное произведение в R^3 определяется, как и в разделе “Элементы линейной алгебры”:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \text{ если } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Норма или модуль вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Для скалярного произведения справедливы следующие законы:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)$, $\quad \vec{a}, \vec{b} \in R^3$.
2) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\vec{c}\right) + \left(\vec{b},\vec{c}\right)$, $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$.
3) $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\alpha\vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\quad \vec{a}, \vec{b} \in R^3$, α - число.
4) $\left(\vec{a},\vec{a}\right) = |\vec{a}|^2$, $\quad \vec{a} \in R^3$.

Базис в R^3 определяется, как и в разделе “Элементы линейной алгебры”. Базис векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ будем считать стандартным. В дальнейшем, если это специально не оговорено, под координатами вектора будем понимать координаты в этом базисе, т.е. $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = -4\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}$.

Решение. $\vec{c}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ -9 \\ -5{,}2 \end{pmatrix}$; $\vec{c}_2 = -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6{,}5 \\ 11 \\ -6{,}4 \end{pmatrix}$.

$\left(\vec{c}_1, \vec{c}_2\right) = 8{,}5 \cdot (-6{,}5) + (-9) \cdot 11 + (-5{,}2) \cdot (-6{,}4) = -120{,}97.$

Ответ. –120,97.

Определение.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем называть **ортогональными**, если их скалярное произведение $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$.

Пример 2. При каком значении *m* векторы $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{pmatrix}m\\4\\0{,}5\end{pmatrix}$ ортогональны?

Решение.

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=3\cdot m+(-2)\cdot 4+1\cdot 0{,}5=3m-7{,}5.$ Из условия ортогональности векторов следует: $3m-7{,}5=0$, или $m=2{,}5$.

Ответ. 2,5.

2.2 Геометрическое изображение вектора в R^3. Линейные операции с векторами. Геометрический смысл скалярного произведения

В пространстве R^3 векторная алгебра допускает наглядную геометрическую интерпретацию. В этом пространстве вектор $\vec{a}$ изображается множеством направленных отрезков, имеющих длину, равную $\left|\vec{a}\right|$ и одинаковое направление. Иначе говоря, вектор в R^3 изображается направленным отрезком, начало которого может располагаться в любой точке трехмерного Евклидова пространства.

Линейные операции над векторами

1) Сложение

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}.$$

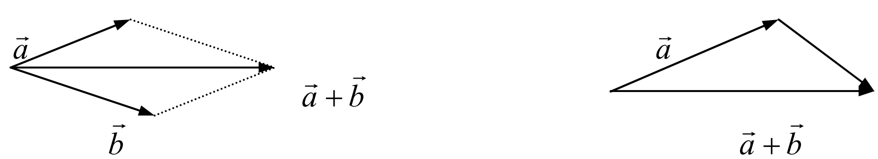

Рис. 2.1.

2) Вычитание

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\\z_1-z_2\end{pmatrix}.$$

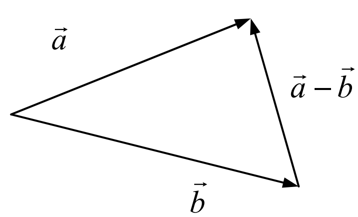

Рис. 2.2.

3) Умножение на число

$$\alpha\,\vec{a}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\,x_1\\\alpha\,y_1\\\alpha\,z_1\end{pmatrix}.$$

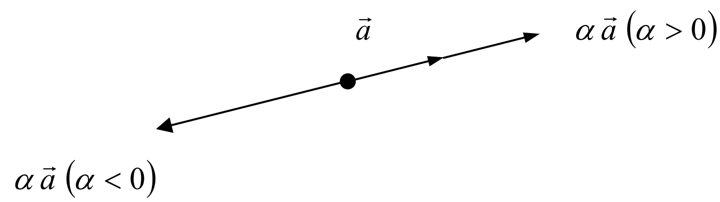

Рис. 2.3.

Пример 1. Найти $\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|$, если $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0{,}5\end{pmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\\4{,}1\end{pmatrix}$.

Решение.

$$2\vec{a}+3\vec{b}=2\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\0{,}5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\\4{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot0{,}6\\2\cdot(-2)+3\cdot0{,}8\\2\cdot0{,}5+3\cdot4{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7{,}8\\-1{,}6\\13{,}3\end{pmatrix},$$

$$\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|=\sqrt{7{,}8^2+1{,}6^2+13{,}3^2}=\sqrt{240{,}29}.$$

Ответ. $\sqrt{240{,}29}$.

Геометрический смысл скалярного произведения

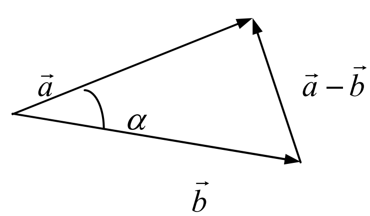

Рис. 2.4.

По свойству скалярного произведения:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\vec{b}\right)-\left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(\vec{b},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2-2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2.$$

С другой стороны, по теореме косинусов: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha+\left|\vec{b}\right|^2$.

Следовательно $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\,\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 2. Найти $\left(\vec{c}_1,\vec{c}_2\right)$, если $\vec{c}_1=5\cdot\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{c}_2=4\cdot\vec{a}-\vec{b}$; $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=120^\circ$.

Решение.

$$\left(\vec{c}_1,\vec{c}_2\right)=\left(5\cdot\vec{a}+\vec{b},4\cdot\vec{a}-\vec{b}\right)=5\cdot4\cdot\left(\vec{a},\vec{a}\right)+4\cdot\left(\vec{b},\vec{a}\right)-5\cdot\left(\vec{a},\vec{b}\right)-\left(\vec{b},\vec{b}\right)=$$

$= 20 \cdot |\vec{a}|^2 - (\vec{a}, \vec{b}) - |\vec{b}|^2 == 20 \cdot |\vec{a}|^2 - |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) - |\vec{b}|^2 = 80 - 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ - 9 =$

$= 80 - 6 \cdot (-0{,}5) - 9 = 74.$

Ответ. 74 .

Следует заметить, что для скалярного произведения векторов выполняются те же законы, что и для алгебраических операций с многочленами. Из этого следует, что при скалярном умножении векторов справедливы формулы сокращенного умножения.

Пример 3. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 5 \cdot \vec{p} - 2 \cdot \vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $\vec{p} \wedge \vec{q} = 60^\circ$.

Решение.

$|\vec{c}|^2 = (\vec{c}, \vec{c}) = (5 \cdot \vec{p} - 2 \cdot \vec{q}, 5 \cdot \vec{p} - 2 \cdot \vec{q}) = (5 \cdot \vec{p} - 2 \cdot \vec{q})^2 = 25 \cdot \vec{p}^{\,2} - 2 \cdot 10 \cdot (\vec{p}, \vec{q}) + 4 \cdot \vec{q}^{\,2} =$

$= 25 \cdot |\vec{p}|^2 - 20 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot cos(\vec{p} \wedge \vec{q}) + 4 \cdot |\vec{q}|^2 = 25 \cdot 9 - 20 \cdot 3 \cdot 4 \cdot cos\, 60^\circ + 4 \cdot 16 = 225 - 240 \cdot \dfrac{1}{2} +$

$+ 64 = 169.$

Ответ. 13.

Из геометрического смысла скалярного произведения следует, что ортогональные векторы должны изображаться перпендикулярными направленными отрезками.

Рассмотрим стандартный ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и изобразим эти векторы единичными (длина которых равна 1), взаимно перпендикулярными отрезками с общим началом в некоторой точке O .

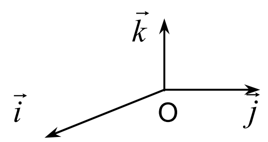

Рис. 2.5.

Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ будем располагать так, чтобы с конца $\vec{k}$ вращение от $\vec{i}$ к $\vec{j}$ происходило против часовой стрелки (рис. 2.5). Такой базис называется базисом **правой ориентации**.

Введем прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O , ось Ox сонаправим с вектором $\vec{i}$, ось Oy – с вектором $\vec{j}$, а ось Oz – с вектором $\vec{k}$. Тогда вектор $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ изобразится направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$. При этом x, y, z – это проекции $\overrightarrow{OA}$ на координатные оси или координаты точки A в системе координат xyz (рис. 2.6).

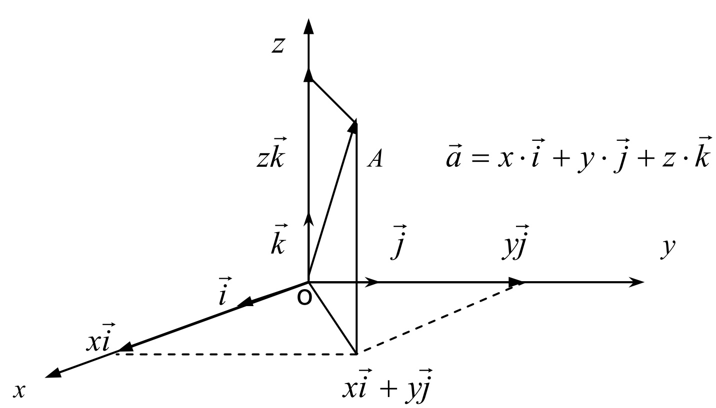

Рис. 2.6.

Если вектор имеет начало в точке $A(x_1, y_1, z_1)$, а конец в точке $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$, поскольку из рис. 2.7. видно, что

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

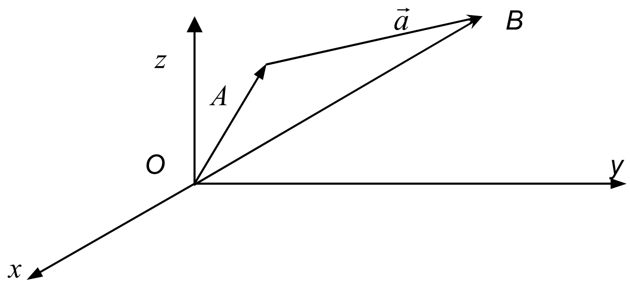

Рис. 2.7.

2.3 Задачи, решаемые с помощью скалярного произведения

Основными задачами, использующими скалярное произведение, являются:

1. Определение угла α между векторам и $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется исходя из геометрического смысла скалярного произведения по формуле:

$$cos\,\alpha = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Пример 1. Найти внутренний угол A и внешний угол B в треугольнике ABC, если $A(2,-1,4)$, $B(4,0,2)$ и $C(2,-3,1)$.

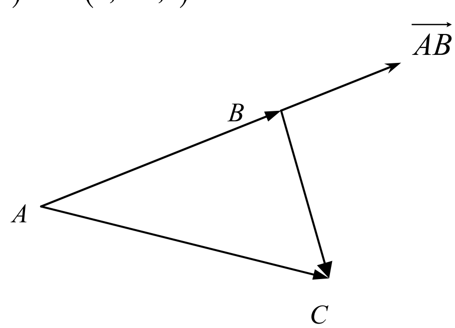

Рис. 2.8.

Решение. Внутренний угол A в треугольнике ABC – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Внешний угол B в треугольнике ABC – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рис. 2.8.).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -3+1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ -3-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Считается, что угол определен, если найдена любая из тригонометрических функций угла, например косинус, поэтому

$$cos\,\angle A=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2\cdot 0+1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+(-3)^2}}=$$

$$=\frac{0-2+6}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{0+4+9}}=\frac{4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{13}}=\frac{4}{3\cdot\sqrt{13}}.$$

$$cos\,\angle B=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{-4-3+2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+9+1}}=\frac{-5}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{14}}=-\frac{5}{3\cdot\sqrt{14}}.$$

Ответ. $cos\,\angle A=\frac{4}{3\cdot\sqrt{13}}$, $cos\,\angle B=-\frac{5}{3\cdot\sqrt{14}}$.

Пример 2. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=60^\circ$.

Решение. Обозначим искомый угол α и найдем его косинус

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}-\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}}{\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}}=\frac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+|\vec{b}|^2}\cdot\sqrt{|\vec{a}|^2-2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+|\vec{b}|^2}}=$$

$$=\frac{1^2-6^2}{\sqrt{1^2+2\cdot1\cdot6\cdot\cos 60^\circ+6^2}\cdot\sqrt{1^2-2\cdot1\cdot6\cdot\cos 60^\circ+6^2}}=\frac{1-36}{\sqrt{1+12\cdot0{,}5+36}\cdot\sqrt{1-12\cdot0{,}5+36}}=$$

$$=\frac{-35}{\sqrt{1333}}.$$

Ответ. $\cos\alpha=\frac{-35}{\sqrt{1333}}$.

2. Вычисление проекции вектора на направление другого вектора.

$$Пр_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot cos\,\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{b}|}.$$

Пример 3. Найти проекцию вектора $\vec{a}+2\vec{b}$ на вектор $\overrightarrow{MN}$, если

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix},\ M(3,-2,-5),\ N(3,4,3).$$

Решение. $Пр_{\overrightarrow{MN}}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a}+2\vec{b},\overrightarrow{MN}\right)}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$.

$$\vec{a}+2\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+4\\3-12\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-9\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}3-3\\4+2\\3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}.$$

$$Пр_{\overrightarrow{MN}}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=\frac{0\cdot0+(-9)\cdot6+3\cdot8}{\sqrt{0^2+6^2+8^2}}=\frac{-30}{\sqrt{100}}=-3.$$

Ответ. –3.

3. Вычисление работы, производимой вектором силы по перемещению материальной точки.

Пусть под действием вектора силы $\vec{f}$ материальная точка M переходит в положение N. Если ввести вектор перемещения $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$, то работу A, производимую силой $\vec{f}$, можно вычислить следующим образом:

$$A = \left|\vec{f}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot cos\left(\vec{f} \,\hat{}\, \vec{s}\right) = \left(\vec{f}, \vec{s}\right).$$

Пример 4. Вычислить работу равнодействующей трех сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2, \vec{f}_3$, приложенных к точке $M(1,1,3)$, если точка под действием этих сил переходит в положение $N(1,2,-3)$ и векторы сил равны: $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ -2,2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4,4 \\ -2,1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,8 \\ 3,6 \end{pmatrix}$.

Решение. Вектор перемещения $\vec{s} = \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-1 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Равнодействующая трех сил $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 =$

$= \begin{pmatrix} 0,3+0,5+0,7 \\ -2,2+4,4+0,8 \\ -1,5-2,1+3,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда работа А, производимая силой $\vec{f}$, равна $A = \left(\vec{f}, \vec{s}\right) = 1,5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-6) = 3$.

Ответ. 3.

2.4 Направляющие косинусы

Направление вектора в пространстве определяется углами, которые соответствующие направленные отрезки образуют с координатными осями. Если обозначить α, β, γ углы вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, то косинусы этих углов можно определить по формулам:

$$cos\,\alpha = cos\left(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{i}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{i}\right)}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$cos\,\beta = cos\left(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{j}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{j}\right)}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$cos\,\gamma = cos\left(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{k}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{k}\right)}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma$ называются направляющими косинусами. Направляющие косинусы удовлетворяют очевидному соотношению:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Пример 1. Может ли вектор образовывать с координатными осями углы $60^\circ, 120^\circ, 135^\circ$?

Решение. $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$

Ответ. Да, может.

Из формул для направляющих косинусов ясно, что если вектор образует с какой-либо координатной осью острый угол, то соответствующая координата положительна и если этот угол больше 90°, то соответствующая координата отрицательна. Например, вектор

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2{,}7 \\ 5{,}2 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$ образует с осями Oy и Oz острые углы, а с ось Ox тупой.

2.5 Коллинеарные векторы

Векторы называются **коллинеарными**, если один можно получить из другого умножением на число.

Из правила умножения направленного отрезка на число следует, что направленные отрезки, изображающие коллинеарные векторы, параллельны. Они одинаково направлены, если один вектор получен из другого умножением на положительное число и противоположено направлены, если один вектор получен из другого умножением на отрицательное число. Для коллинеарных векторов используется такое же обозначение, как и для параллельных отрезков.

Итак, если $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, то $\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha \vec{b}$, или $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$,

или $\begin{cases} x_1 = \alpha\, x_2 \\ y_1 = \alpha\, y_2 \\ z_1 = \alpha\, z_2 \end{cases}$, или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Пример 1. Выяснить, при каких значениях p и q векторы

$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ q \\ -1 \end{pmatrix}$ коллинеарны?

Решение. Из условия коллинеарности векторов следует $\frac{p}{2} = \frac{1}{q} = \frac{-2}{-1} = 2$ или

$\frac{p}{2} = 2, \frac{1}{q} = 2$, а тогда $p = 4$, $q = \frac{1}{2}$.

Ответ. $p = 4$, $q = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Найти орт вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Ортом вектора называется вектор, который сонаправлен данному, и модуль которого равен 1. Обозначим искомый вектор $\vec{e}$ и воспользуемся условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{e}$.

$\vec{e} = \alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$, причем α – положительное число. Поскольку $|\vec{e}| = 1$, то $\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2} = 1$. Тогда $9\alpha^2 = 1$. Или $\alpha^2 = \frac{1}{9}$ и $\alpha = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$. Теперь можно определить координаты вектора $\vec{e}$,

$\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. ***Ответ.*** $\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

В разделе “Элементы линейной алгебры” было дано определение линейно зависимых векторов, а так же необходимое и достаточное условие линейной зависимости. Учитывая это, можно вывести геометрический смысл линейной зависимости двух векторов. Поскольку в случае коллинеарности двух векторов один из них выражается линейно через другой, то два вектора в R^3 линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Пример 3. Являются ли векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}25 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ линейно независимыми?

Решение. Поскольку $\vec{b} = -4 \cdot \vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарны, а, следовательно, линейно зависимы.
Ответ. Векторы линейно зависимы.

2.6 Векторное произведение и его свойства

Векторным произведением векторов $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ называется вектор, который обозначается $[\vec{a}, \vec{b}]$ и координаты которого можно найти по формуле:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

Для векторного произведения выполняются все свойства, которые справедливы для определителя:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, $\quad \vec{a}, \vec{b} \in R^3$.
2. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$, $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$.
3. $[\alpha\, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha\, \vec{b}] = \alpha\, [\vec{a}, \vec{b}]$, $\quad \vec{a}, \vec{b} \in R^3$, α - число.
4. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ненулевые, $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$.

Пример 1. Вычислить $\left[\vec{c}_1, \vec{c}_2\right]$, если $\vec{c}_1 = \vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = -2\vec{a} + \vec{b}$, и если $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{c}_2 = -2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\left[\vec{c}_1, \vec{c}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (12+3)\vec{i} - (16+9)\vec{j} + (-4+9)\vec{k} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ответ. $\left[\vec{c}_1, \vec{c}_2\right] = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2.7 Смешанное произведение векторов и его свойства

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, которое обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и которое вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Если разложить определитель по элементам первой строки, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$ можно установить, что

смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\left[\vec{b}, \vec{c}\right]$, т.е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$.

Из последней записи понятно, почему $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется смешанным произведением, иногда его называют также векторно-скалярным.

Если определитель в определении смешанного произведения разложить по элементам третьей строки, то можно показать, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$. Иначе говоря, в смешанном произведении любые два вектора умножаются векторно, а результат умножается на третий вектор скалярно. При этом должен сохраняться только порядок перемножаемых векторов.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) = \left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c} \right] \right).$$

Из свойств определителя можно установить следующие свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение меняет знак, если меняются местами любые два вектора
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$
2. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке векторов
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}.$$
3. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы

Если для трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то векторы называются **компланарными.**

Из определения следует, что если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - компланарные векторы, то они коллинеарны какой-то одной плоскости. Поскольку по свойствам смешанного произведения они в этом случае линейно зависимы, следовательно, один из них, например $\vec{a}$, может быть представлен линейной комбинацией двух других, то есть $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ (рис.2.9).

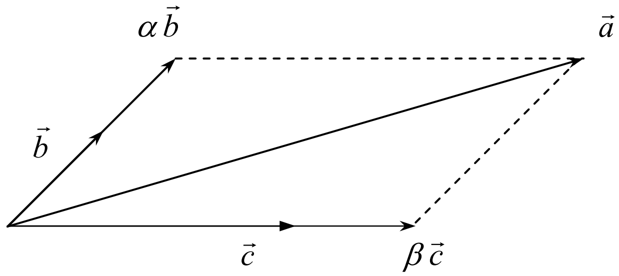

Рис. 2.9.

Пример 1. Являются ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ линейно зависимыми?

Решение.

Из правила сложения направленных отрезков следует, что эти векторы компланарны, следовательно, они линейно зависимы.

Ответ. Линейно зависимы.

Пример 2. Лежат ли точки *A*(2,–1, –3), *B*(–4,1, –2), *C*(0, –6,3) и *D*(–12, –2,5) в одной плоскости?

Решение. Если точки *A*, *B*, *C* и *D* лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны (рис. 2.10). Поэтому необходимо проверить, равно ли нулю смешанное произведение $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}$.

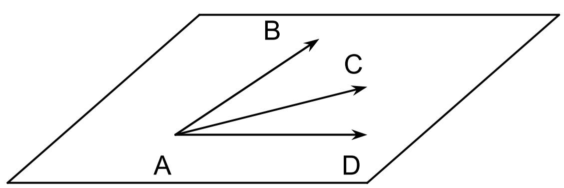

Рис. 2.10.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 6 \\ -14 & -1 & 8 \end{vmatrix} \overset{(-6)\quad(-8)}{=} \begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 34 & -17 & 0 \\ 34 & -17 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -17 \\ 34 & -17 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ. Точки лежат в одной плоскости.

Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в базисе правой ориентации называется правой, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ и левой, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$. Изображается правая тройка так же, как и базис правой ориентации: из конца третьего вектора $\vec{c}$ движение от первого вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки.

Пример 3. Какую тройку образуют векторы $2\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$? Векторы $\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}$?

Решение. Тройка векторов $2\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - правая, т.к. смешанное произведение

$2\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$. Тройка векторов $\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}$ - левая, так как смешанное

произведение $\vec{j}\ \vec{i}\ \vec{k} = -\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k} = -1 < 0$.

2.8 Геометрический смысл векторного произведения

Если $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, а $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$, то вектор $\vec{c}$ удовлетворяет трем условиям:

1. $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$, так как

$$\left(\vec{c}, \vec{a}\right) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

аналогично $\left(\vec{c}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$.

2. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\,\alpha$, $\alpha = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$, так как $\left|\vec{c}\right|^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 =$

$$= \left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right)^2 + \left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right)^2 + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)^2 =$$

$$= y_1^2 z_2^2 + y_2^2 z_1^2 + x_1^2 z_2^2 + x_2^2 z_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2 y_1 y_2 z_1 z_2 - 2 x_1 x_2 z_1 z_2 - 2 x_1 x_2 y_1 y_2 =$$

$$= \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) \cdot \left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) - \left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right)^2 =$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \left(1 - \cos^2\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)\right) =$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \sin^2\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right).$$

3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку,

так как $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2 > 0$.

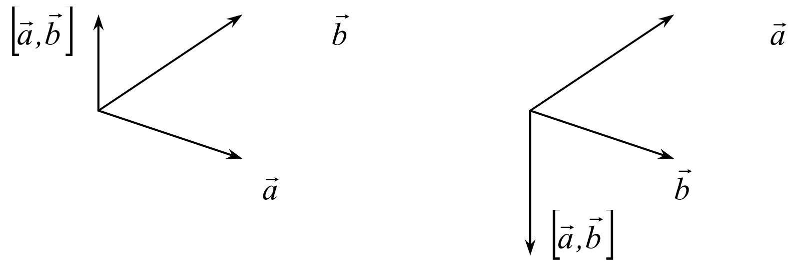

Рис. 2.11.

Пример 1. Найти $\left|\left[\vec{c}_1,\vec{c}_2\right]\right|$, если $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = -\vec{a} + 3\vec{b}$. $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 2$, $\vec{a}\,^\wedge\vec{b} = 30^\circ$.

Решение. По свойствам векторного произведения

$\left[\vec{c}_1,\vec{c}_2\right] = \left[4\vec{a} - 2\vec{b}, -\vec{a} + 3\vec{b}\right] = -4\left[\vec{a},\vec{a}\right] + 2\left[\vec{b},\vec{a}\right] + 12\left[\vec{a},\vec{b}\right] - 6\left[\vec{b},\vec{b}\right]$.

Учитывая, что $\left[\vec{a},\vec{a}\right] = \vec{0}$, $\left[\vec{b},\vec{b}\right] = \vec{0}$ и $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$, получим

$\left[\vec{c}_1,\vec{c}_2\right] = -2\left[\vec{a},\vec{b}\right] + 12\left[\vec{a},\vec{b}\right] = 10\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Тогда $\left|\left[\vec{c}_1,\vec{c}_2\right]\right| = 10\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = 10|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| sin\left(\vec{a}\,^\wedge\vec{b}\right) =$

$= 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot sin\,30^\circ = 40 \cdot 0{,}5 = 20$.

Ответ. $\left|\left[\vec{c}_1,\vec{c}_2\right]\right|$=20.

2.9 Задачи, решаемые с помощью векторного произведения

1. Вычисление площадей параллелограмма и треугольника, построенных на двух векторах.

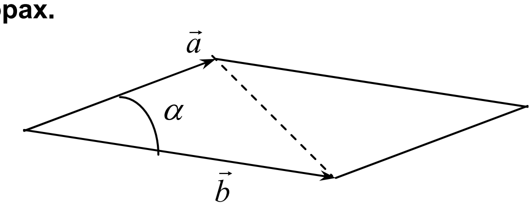

Рис. 2.12

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна

$S_{пар} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| sin\left(\vec{a}\,^\wedge\vec{b}\right)$, а площадь треугольника $S_{тр} = 1/2 \cdot S_{пар} = 1/2 \cdot |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right| sin\left(\vec{a}\,^\wedge\vec{b}\right)$.

Из условия 2 пункта 2.8 следует $S_{пар} = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$, $S_{тр} = 1/2 \cdot \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

Пример 1. Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(2,-2,3)$, $B(-3,-6,0)$, $C(4,-3,-1)$.

Решение. Треугольник *ABC* образован векторами

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ и } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}. \quad \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 13\vec{i} - 26\vec{j} + 13\vec{k} = \begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$S_{ABC} = 1/2 \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = 1/2 \cdot \sqrt{13^2 + 26^2 + 13^2} = 13/2 \cdot \sqrt{6}$.

Ответ. $13/2 \cdot \sqrt{6}$.

2. **Вычисление момента сил.**

Если вектор силы $\vec{f}$ приложен к точке A и требуется найти момент этой силы относительно точки O, то момент силы $\overrightarrow{M}$ равен $\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{f}\right]$ (рис.2.13).

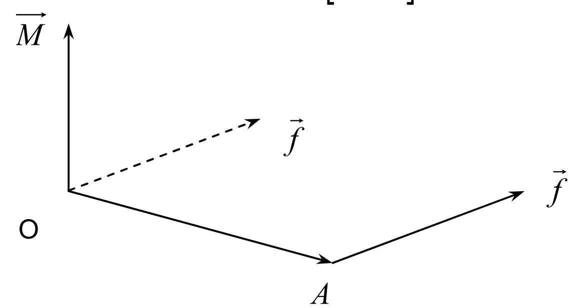

Рис. 2.13.

Пример 2. Вычислить момент силы $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$, приложенной к точке $A(3, -2, 7)$ относительно точки $O(-1, 2, 1)$.

Решение. $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{f}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 1{,}5 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. **Определение вектора, ортогонального двум данным**

Иногда требуется найти вектор, ортогональный двум данным. Из условия 1 пункта 2.8 следует, что искомый вектор коллинеарен векторному произведению заданных векторов.

Пример 3. Найти вектор $\vec{p}$, ортогональный векторам,

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, для которого $(\vec{p}, \vec{c}) = 3$, где $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вектор $\vec{p}$ коллинеарен векторному произведению $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, следовательно $\vec{p} = \alpha \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Поскольку $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 23\vec{j} + 14\vec{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ -23 \\ 14 \end{pmatrix}$, то

$\vec{p} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -23 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -23\alpha \\ 14\alpha \end{pmatrix}$. Так как $(\vec{p}, \vec{c}) = 3$, то $4\alpha \cdot 1 - 23\alpha \cdot 1 + 14\alpha \cdot 1 = 3$,

или $-5\alpha = 3,\ \alpha = -3/5 = -0{,}6$. Теперь можно определить координаты вектора $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -23 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 13{,}8 \\ -8{,}4 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 13{,}8 \\ -8{,}4 \end{pmatrix}$.

2.10 Геометрический смысл смешанного произведения. Задачи, решаемые с помощью смешанного произведения

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right) = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\alpha$, где α - угол между векторами $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и $\vec{c}$.

Построим на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ параллелепипед (рис. 2.14.) и покажем, что смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно модулю объема этого параллелепипеда. Так как $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ или площади основания параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, а $|\vec{c}| \cdot \cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{c}$ на вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ или высота *h* параллелепипеда, то $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = S_{пар-ма} \cdot h = V_{параллелепида}$.

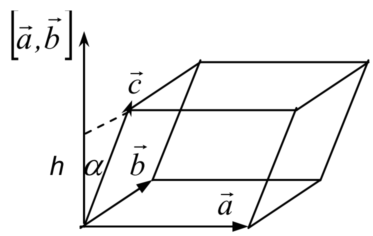

Рис. 2.14.

Рис. 2.14. сделан для векторов, которые образуют правую тройку, в этом случае угол между векторами $\vec{c}$ и $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ острый и $h = |\vec{c}| \cdot \cos\alpha > 0$.

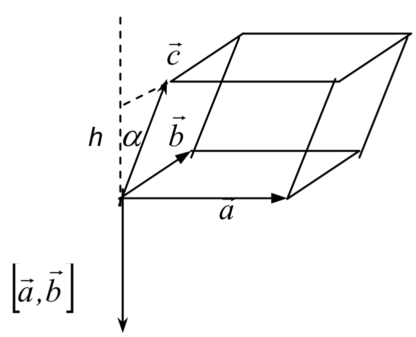

Рис. 2.15.

Если тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая (рис.2.15.), то угол между векторами $\vec{c}$ и $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$>90^{o}. В этом случае $\cos\alpha < 0$ и тогда $h = -|\vec{c}| \cdot \cos\alpha > 0$. Поэтому $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -V_{параллелепида}$. При любом расположении векторов $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V_{параллелепида}$.

Геометрический смысл смешанного произведения используют при вычислении объемом параллелепипедов и тетраэдров, построенных на трех векторах. Формула объема параллелепипеда уже получена $V_{параллелепида} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Выведем формулу объема тетраэдра (четырехугольной пирамиды), построенной на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Из рис. 2.16 легко видеть, что $V_{тетраэдра} = 1/3 \cdot S_0 \cdot h$, где S_0 - площадь треугольника в основании тетраэдра, а *h* – его высота. Поскольку площадь треугольника $S_0 = 1/2\, S_{пар-ма}$, где $S_{пар-ма}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а высоты тетраэдра и параллелепипеда, построенных на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ совпадают, то

$$V_{тетраэдра} = 1/6 \cdot S_{пар-ма} \cdot h = 1/6 \cdot V_{пар-да} = 1/6\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

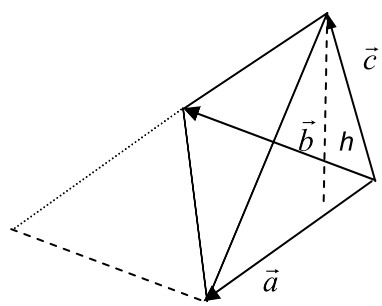

Рис. 2.16.

Пример. Найти объем тетраэдра $ABCD$, если $A(1,-3,-5)$, $B(-1,2,-4)$, $C(0,0,-2)$, $D(-6,-1,-2)$.

Решение. Тетраэдр $ABCD$ построен на векторах

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$ (Рис. 2.17).

$V_{тетраэдра} = 1/6\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$. Вычислим

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & \cdot(-3) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 5 & -12 & 0 \\ -1 & -13 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ -1 & -13 \end{vmatrix} = (-13 \cdot 5 - 12) = -77.$$

Тогда $V_{тетраэдра} = 1/6\left|-77\right| = 77/6$.

Ответ. $77/6$.

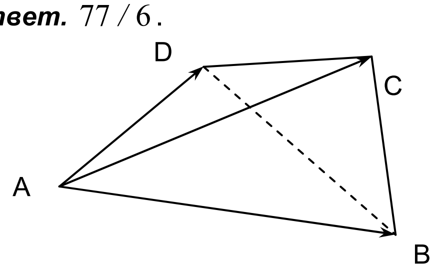

Рис. 2.17.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Как вычислить норму вектора?
2. Как вычисляется скалярное произведение?
3. Какие векторы образуют стандартный базис в пространстве R^3 ?
4. В чем заключается геометрический смысл скалярного произведения?
5. Когда скалярное произведение двух векторов равно нулю?
6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов?
7. Как вычисляется проекция вектора на направление другого вектора?
8. Каким свойством обладают направляющие косинусы?
9. Как вычисляется векторное произведения двух векторов?
10. Когда векторное произведения двух векторов равно нулю?
11. Как вычисляется смешанное произведение векторов?
12. Когда вектора называются компланарными?
13. Как вычислить площадь треугольника, построенного на двух векторах?
14. По какой формуле вычисляется объем параллелепипеда?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Вектор в декартовой прямоугольной системе координат. Норма или модуль вектора. Ортогональные вектора. Базис в R^3. Ориентация векторов.
2. Скалярное произведение двух векторов. Алгебраические свойства скалярного произведения.
3. Геометрический смысл скалярного произведения.
4. Линейные операции над векторами.
5. Определение угла между двумя векторами.
6. Вычисление проекции вектора на направление другого вектора.
7. Вычисление работы, производимой вектором силы по перемещению материальной точки.
8. Направляющие косинусы.
9. Понятие коллинеарности двух векторов. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов.
10. Определение векторного произведения двух векторов.
11. Векторное произведение и его свойства. Геометрический смысл векторного произведения.
12. Правые и левые тройки векторов.
13. Вычисление площадей параллелограмма и треугольника, построенных на двух векторах. Вычисление момента силы. Определение вектора, ортогонального двум данным.
14. Смешанное произведение трех векторов и его свойства.
15. Геометрический смысл смешанного произведения. Вычисление объемов параллелепипеда и тетраэдра.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

2. Векторная алгебра (4 часа).

1. Векторы в $\boldsymbol{R^3}$. Координаты вектора. Линейные операции с векторами. Модуль и направляющие косинусы. Коллинеарные векторы. Скалярное произведение векторов. Вычисление угла между векторами. Проекция вектора (2 часа).
Л.2 гл. 2 §1: 1.1 – 1.2.

2. Векторное произведение векторов. Вычисление площадей параллелограмма и треугольника. Смешанное произведение векторов. Правая и левая тройка векторов. Компланарные векторы. Вычисление объемов параллелепипеда и тетраэдра (2 часа).
Л.2 гл. 2 §1: 1.3 – 1.6.