Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)
Кафедра математики

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 6. **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 22.161.1

УДК 517.2

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева. Математика. Тема 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с. 43.

Ил. 9 . Табл. 22 . Библиогр.: 7 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных[специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных», теоретический материал по этой теме, с большим количеством разобранных типовых задач, а также контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнено по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Н.Н.Катрушенко

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 2 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 6: «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных».
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 2–го СЕМЕСТРА

№ темы	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Всего аудиторных	Из них		
				Лекции	Практические занятия	
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2.	48	28	16	12	20
6	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	38	26	12	14	12
7	Интегральное исчисление функций одной переменной.	66	44	24	20	22
8	Ряды.	38	28	20	8	10
Всего за 2 семестр		190	126	72	54	64

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (14 часов)

10. Метрическое n - мерное пространство. Функция n переменных. Функция двух переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные и их геометрический смысл (2 часа).
11. Дифференцируемая функция. Необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости. Производная сложной функции n переменных. Полная производная (2 часа).
12. Дифференциал функции n переменных. Оценка погрешностей. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных (2 часа).
13. Производные и дифференциалы высших порядков. Неявные функции. Дифференцирование неявных функций одной и двух переменных. Дифференцирование неявных функций, заданных системой. (2 часа).
14. Экстремум функции двух переменных: определение, необходимое условие, достаточное условие. Экстремум функций n переменных. (2 часа).
15. Задачи на наименьшее и наибольшее значения (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

1. Функции нескольких переменных

1.1. Прямое произведение множеств. n - мерное пространство R^n.

Определение 1

Пусть заданы два множества X и Y. *Прямым произведением* $X \times Y$ этих множеств называется множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Упорядоченность пары (x, y) следует понимать в том смысле, что $(x, y) \neq (y, x)$.

Пример 1

Если заданы множества $X = \{1,2,3\}$ и $Y = \{p, q\}$, то их прямым произведением является следующее множество

$$X \times Y = \{(1, p); (1, q); (2, p); (2, q); (3, p); (3, q)\}.$$

Пример 2

Если R - множество всех вещественных чисел, то прямое произведение $R \times R$ или пространство R^2- это множество всех упорядоченных пар вещественных чисел. Если использовать метод координат, то можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами $(x, y) \in R^2$ и точками $M(x, y)$ плоскости с выбранной на ней системой координат.

Пример 3

$R \times R \times R$ или пространство R^3- это множество всех упорядоченных троек вещественных чисел. Метод координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие между элементами $(x, y, z) \in R^3$ и точками $M(x, y, z)$ трехмерного Евклидова пространства с выбранной в нем декартовой системой координат.

Определение 2

Прямое произведение $\underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n\ раз}$, то есть множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из n вещественных чисел называется n - мерным пространством и обозначается: R^n. Элементы $(x_1, x_2, ...x_n) \in R^n$ называются точками пространства R^n и обозначаются $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Вещественные числа $x_1, x_2, ...x_n$ называются *координатами точки* M.

Определение 3

Расстоянием между точками $M_1(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$ и $M_2(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ пространства R^n называется число, $\rho(M_1, M_2)$, которое определяется по формуле:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2 + ... + (x_n^1 - x_n^2)^2}.$$

Теорема

Расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между точками M_1 и M_2 из пространства R^n удовлетворяет следующим соотношениям:

a) $\rho(M_1, M_2) \geq 0$.
b) $\rho(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2$.
c) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$.
d) $\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$.

Утверждения a, b и c теоремы очевидны из определения расстояния. Утверждение d, так называемое *неравенство треугольников*, доказывается аналогично тому, как это было сделано для расстояния в линейном векторном евклидовом пространстве.

Пространство R^n, в котором определено расстояние между двумя точками (метрика), называется *метрическим.*

1.2. Окрестности точек в пространстве R^n. Классификация точек. Открытые и замкнутые множества.

Определение 1

Пусть $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in R^n$ и $\delta > 0$ - вещественное число. δ - *окрестностью точки* M_0 называется множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, для которых справедливо: $\rho(M_0, M) < \delta$. δ -окрестность точки M_0 обозначается $U_\delta(M_0)$.

Пример 1

Если $M_0 \in R^2$, то $U_\delta(M_0)$ - открытый круг (граница не входит в это множество) с центром в точке M_0 и радиусом δ (рис.1). Если $M_0 \in R^3$, то $U_\delta(M_0)$ - открытый шар (граница не входит в это множество) с центром в точке M_0 и радиусом δ (рис.2).

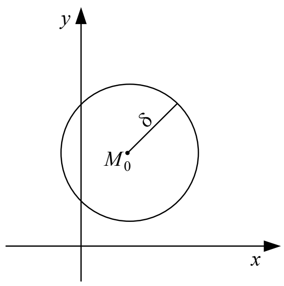

Рис.1.

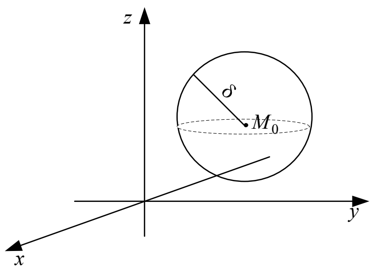

Рис.2.

Определение 2

Пусть $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in R^n$ и $\delta > 0$. *Проколотой* δ - *окрестностью точки* M_0 называется множество $U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$, то есть множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, для которых справедливо: $0 < \rho(M_0, M) < \delta$. Проколотая δ - окрестность точки M_0 обозначается $\dot{U}_\delta(M_0)$.

Определение 3

Точка $M_0 \in D \subset R^n$ называется *внутренней* точкой множества D, если $\exists\ U_\delta(M_0) \subset D$.

Определение 4

Точка M_0 называется *граничной* точкой множества $D \subset R^n$, если ее любая окрестность содержит как точки множества D, так и точки, не принадлежащие D.

Определение 5

Точка M_0 называется *предельной* точкой множества $D \subset R^n$, если любая ее проколотая окрестность содержит хотя бы одну точку множества D.

ЗАМЕЧАНИЕ

Граничные и предельные точки множества могут и не принадлежать этому множеству.

Определение 6

Совокупность всех граничных точек множества называется его *границей.*

Пример 2

Для множества точек $M(x, y, z)$ пространства R^3, для которых справедливо: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$, и которое геометрически в прямоугольной системе координат изображается кубом (рис.3), начало координат $O(0,0,0)$ является граничной и предельной точкой, а точка $P(0{,}5;\, 0{,}5;\, 0{,}5)$ - внутренней и предельной .

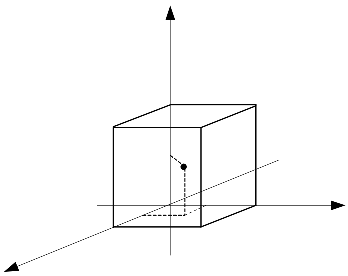

Рис.3.

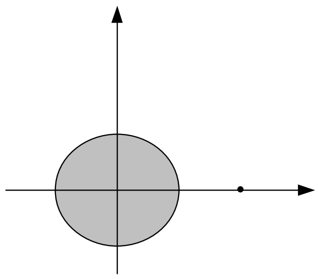

Рис.4.

Пример 3

Пусть множество $D \subset R^2$ является объединением множества пар чисел (x, y), для которых $x^2 + y^2 < 1$, и точки $M(2,0)$. Все точки этого множества кроме точки M - внутренние и предельные. Точки (x, y), для которых $x^2 + y^2 = 1$- граничные и предельные (рис.4). Точка M не является ни внутренней, ни предельной, ни граничной.

Определение 7

Множество $D \subset R^n$ называется *открытым*, или связной областью, если все его точки - внутренние.

Определение 8

Множество $D \subset R^n$ называется *замкнутым,* если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 4

Множество $E \subset R^2$: $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ является открытым. Множество $D \subset R^2$: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ является замкнутым.

ЗАМЕЧАНИЕ

Не следует понимать, что любое множество открыто или замкнуто. Множество $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(2,2)\}$, согласно определению, не является ни тем, ни другим. Кроме того, можно указать множества, которые и замкнуты и открыты одновременно. Например, множество вещественных чисел R и замкнуто и открыто одновременно. Если его не рассматривать как подмножество R^2, то оно открыто. Если считать $R \subset R^2$, то оно замкнуто.

1.3. Функции n переменных. Предел и непрерывность функции n переменных

Определение 1

Функцией n переменных называется отображение некоторого множества $D \subset R^n$ во множество вещественных чисел R. Иначе говоря, функция - это правило, по которому

$\forall M(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ ставится в соответствие вещественное число w. Это правило (соответствие) обозначают: $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $w = f(M)$.

Множество D называется областью определения функции, а множество $E = \{w \in R : w = f(M), M \in D\}$ - областью значений функции $w = f(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если $D \subset R^2$, то $w = f(x_1, x_2)$ - функция двух переменных. Обычно для функции двух переменных используют обозначение $z = f(x, y)$.

В трехмерном евклидовом пространстве с введенной декартовой системой координат функция $z = f(x, y)$ задает некоторую поверхность. Например, функция $z = x^2 + y^2$ задает параболоид вращения (рис.5).

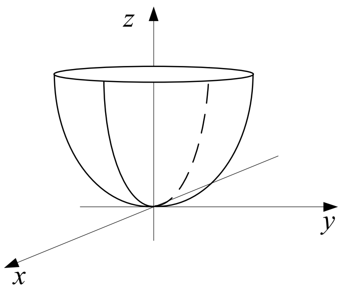

Рис.5.

Пример 1

Найдите область определения и область значений функции двух переменных $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение

Область определения заданной функции находится из условия $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq 4$. Из последнего неравенства следует, что область определения $D \subset R^2$ - это внутренность круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

Область значений функции найдем, записывая ее аналитическое выражение в виде: $\begin{cases} z^2 = 4 - x^2 - y^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$, или $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$. Следовательно, функция задает верхнюю половину сферы с центром в начале координат и радиусом 2 (рис.6). Из рисунка 6 видно, что $0 \leq z \leq 2$, то есть областью значений функции является множество $E = [0, 2]$.

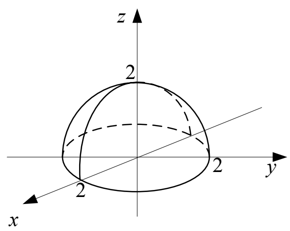

Рис.6.

Определение 2

Пусть на множестве $D \subset R^n$ задана функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ - предельная точка множества D. Число A называют *пределом функции* $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке M_0 и записывают

$$\lim_{x_i \to x_i^0} f(x_1, x_2, ..., x_n) = A \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(M) = A,$$

если для любой ε - окрестности точки A - $U_\varepsilon(A)$ найдется δ - окрестность точки $\grave{I}_0$ - $U(M_0)$, для которой справедливо: если точка $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \cap \dot{U}(M_0)$, то значение функции в этой точке $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in U_\varepsilon(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Учитывая определение окрестностей в пространстве R^n, определение предела для функции нескольких переменных можно записать в следующем виде:

Пусть функция $f(M)$ задана на множестве $D \subset R^n$ и $M_0 \in D$ - предельная точка D. $\lim_{M \to M_0} f(M) = A$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0:$ $\forall M \in D:$ $0 < \rho(M_0, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon$.

Пример 2

Задана функция двух переменных $f(x, y) = x \sin\frac{1}{y} + y \cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Покажем, пользуясь определением, что $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$. В самом деле, поскольку

$$|f(x, y)| \le |x| \cdot \left|\sin\frac{1}{y}\right| + |y| \cdot \left|\cos\frac{1}{x}\right| \le |x| + |y|,$$

то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любой точки $M(x, y) \in \dot{U}_\delta(O)$ выполняется $|x| + |y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, откуда следует, что $|f(x, y)| < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Все теоремы о пределах для функции одной переменной справедливы и для функций многих переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Из определения предела и замечания 1 следует, что для того, чтобы функция $f(M)$ имела предел в точке M_0, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $M_1, M_2, ..., M_n$, имеющей пределом точку M_0, существовал предел $\lim_{n \to \infty} f(M_n)$ и был одинаковым для всех последовательностей $M_1, M_2, ..., M_n$.

Пример 3

Функция $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ не имеет предела в точке $O(0,0)$ - начале координат. Если задать последовательности точек, стремящихся к началу координат по прямым $\begin{cases}x=mt\\ y=nt\end{cases}$, то

$$\lim_{t\to 0}\frac{m^2nt^3}{m^4t^4+n^2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{m^2nt}{m^4t^2+n^2}=0.$$

Если же рассмотреть последовательность точек, сходящуюся к началу координат по параболе $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\end{cases}$, то

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+t^4}=\tfrac{1}{2}.$$

Пример 4

Пусть задана функция $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}-\cos xy}{3xy}$. Предел этой функции в начале координат равен $\frac{1}{3}$. Это следует из того, что можно сделать замену переменных $xy=t$ и перейти к пределу функции одной переменной t.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{xy}-\cos xy}{3xy}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-\cos t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^t-1\right)+\left(1-\cos t\right)}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{t+\frac{1}{2}t^2}{3t}=\frac{1}{3}.$$

Определение 3

Функция $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$, определенная на множестве $D\subset R^n$, называется *непрерывной* в точке $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)\in D$, если в этой точке существует конечный предел, равный значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$.

Определение 4

Пусть на множестве $D\subset R^n$ задана функция $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$ и пусть $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)\in D$. Пусть числа $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$ таковы, что точка $M\left(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,...,x_n^0+\Delta x_n\right)\in D$. *Полным приращением функции* $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке M_0 называется число $\Delta w=f(M)-f(M_0)$.

Теорема 1

Для того чтобы функция $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$, заданная на множестве D, была непрерывна в точке $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)\in D$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\Delta w=0,\ i=1,2,...n$.

Доказательство

Из того, что функция $w=f(x_1,x_2,...,x_n)$ непрерывна в точке M_0 следует, что существует конечный $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$. Тогда $\lim\limits_{M\to M_0}\left(f(M)-f(M_0)\right)=0$. Если координаты точки $M(x_1,x_2,...,x_n)$ представить в виде

$x_1 = x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2 = x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n = x_n^0 + \Delta x_n$, то ясно, что $M \to M_0 \Leftrightarrow \Delta x_i \to 0,\ i = 1,2,...,n$. Так как $f(M) - f(M_0) = \Delta w$, то $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \Delta w = 0,\ i = 1,2,...,n$.

Определение 5

Функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданная на множестве $D \subset R^n$ и непрерывная в каждой точке $M_0 \in D$, называется непрерывной на множестве D.

Определение 6

Точка, в которой не выполнено условие непрерывности, называется *точкой разрыва* функции.

ЗАМЕЧАНИЕ

> Множества точек разрыва функции нескольких переменных может иметь самую разнообразную структуру. В частности, они могут образовывать линии разрыва и поверхности разрыва.

Пример 5

Прямая $y = x$ является линией разрыва для функции $w = \dfrac{x+y}{x-y}$. Коническая поверхность $z^2 = x^2 + y^2$ является поверхностью разрыва для функции $w = \dfrac{3x}{x^2 + y^2 - z^2}$.

Для непрерывных функций n переменных справедливы следующие теоремы.

Теорема 2

Функция $w = f(M)$, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве $D \subset R^n$, ограничена на этом множестве и достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Теорема 3

Пусть функция $w = f(M)$ непрерывна в замкнутом и ограниченном множестве $D \subset R^n$ и пусть $p \le f(M) \le P$ для всех точек $M \in D$. Если для числа c справедливо неравенство $p \le c \le P$, то существует точка $M_0 \in D$, такая, что $f(M_0) = c$.

2. Дифференцирование функций *n* переменных

2.1. Частные производные функции *n* переменных

Определение 1

Пусть функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ определена на множестве $D \subset R^n$. Пусть точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$ и $M_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0 + \Delta x_i, ..., x_n^0)$ принадлежат этому множеству. *Частным приращением* функции $f(x_1, x_2, ...x_i, ..., x_n)$ по переменной x_i называется число, равное разности значений функции в этих точках, то есть $f(M_i) - f(M_0)$ или $f(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0 + \Delta x_i, ..., x_n^o) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^o)$. Частное приращение обозначается $\Delta_{x_i} w$ или $\Delta_{x_i} f$.

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частные приращения в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменным x и y равны:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение 2

Пусть функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ определена на множестве $D \subset R^n$ и пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0) \in D$. Если существует и конечен $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} w}{\Delta x_i}$, то он называется *частной производной* функции w по переменной x_i и обозначается $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ или $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частные производные по x и y определяются как пределы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

если они существуют и конечны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Ясно, что частные производные функции n переменных в свою очередь являются функциями этих же переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Из определения частных производных следует, что при вычислении частной производной функции $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ по переменной x_i, следует рассматривать ее как функцию одной переменной x_i, а все остальные переменные считать постоянными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Из определения частных производных и замечания 2, можно сделать вывод, что при частном дифференцировании функции n переменных справедливы все правила дифференцирования, а также таблица производных, полученные для функции одной переменной.

Пример 1

Вычислите частные производные функции двух переменных $z = x^y$.

Решение

Заданная функция является степенной относительно переменной x и показательной относительно переменной y. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Пример 2

Вычислите частные производные функции трех переменных $w = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + x^2 yz$.

Решение

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y} + 2xyz, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} + x^2 z, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + x^2 y.$$

Пример 3

Вычислить частные производные для функции двух переменных $\dfrac{1-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение

Используя правило дифференцирования частного, вычислим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\sqrt{x^2+y^2}-(1-xy)\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}, \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\sqrt{x^2+y^2}-(1-xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

Поскольку переменные x и y входят в аналитическое выражение функции симметрично, то частную производную по y можно получить, заменяя в частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ x на y, а y на x. То есть

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x\sqrt{x^2+y^2}-(1-xy)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

Следует заметить, что частным производным функции двух переменных можно дать наглядный геометрический смысл.

Теорема 1

Путь функция двух переменных $z=f(x,y)$ определена на множестве $D\subset R^2$ и точка $M_0(x_0,y_0)\in D$. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α - угол между касательной, проведенной к пространственной кривой, заданной системой $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$, в точке с координатами $x_0, y_0, f(x_0,y_0)$ и осью Oy.

Доказательство

При вычислении частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ переменная x сохраняет постоянное значение $x=x_0$. Функция $z=f(x,y_0)$ геометрически задает линию пересечения поверхности $z=f(x,y)$ с плоскостью $x=x_0$. Из геометрического смысла производной функции одной переменной следует, что $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)$ равняется угловому коэффициенту касательной к этой кривой в точке с ординатой y_0 или $\operatorname{tg}\alpha$, где α - угол, который эта касательная составляет с осью Oy (рис.7).

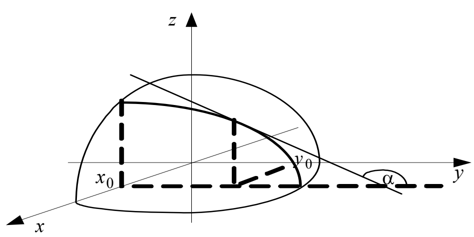

Рис. 7.

Справедлива аналогичная теорема о геометрическом смысле частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)$.

Теорема 2

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена на множестве $D \subset R^2$ и точка $M_0(x_0, y_0) \in D$. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α - угол между касательной, проведенной к пространственной кривой, заданной системой $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$, в точке с координатами $x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ и осью Ox.

Пример 4

Какой угол составляет касательная к кривой $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = 1 \end{cases}$ в точке $M_0(1{,}1)$ с осью Oy?

Решение

Если α - искомый угол, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial z}{\partial y}(1{,}1)$. Определим $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и вычислим в точке M_0. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, следовательно, искомый угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.2. Дифференцируемая функция. Условия дифференцируемости

Определение 1

Функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) \in D \subset R^n$, где D - область определения функции, если ее полное приращение Δw в этой точке можно представить в виде: $\Delta w = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \theta(\rho)$, где A_i - числа, которые зависят только от координат точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ и не зависят от Δx_i, а $\theta(\rho)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Заметим, что согласно определению полное приращение Δw дифференцируемой функции представимо в виде двух частей. Первая часть - $\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ является линейной относительно приращений Δx_i. а вторая - $\theta(\rho)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем каждое приращение Δx_i.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

В отличие от функции одной переменной для функции многих переменных нельзя сформулировать условие, которое является одновременно необходимым и достаточным условием дифференцируемости.

Теорема 1. (Необходимое условие дифференцируемости)

Если функция n переменных дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней конечные частные производные по всем переменным.

Доказательство

Пусть функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0\right)$ из области определения $D \subset R^n$. По определению ее полное приращение $\Delta w = f\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^o\right)$ можно представить в виде:

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \theta(\rho) \qquad (1)$$

Из последнего равенства следует:

1. Приращения $\Delta w \to 0$ при всех $\Delta x_i \to 0$, $i = 1,2,...,n$. Это ясно из того, что ρ - бесконечно малая при $\Delta x_i \to 0$, $i = 1,2,...,n$, а поскольку A_i - некоторые числа, то и $\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i \to 0$ при $\Delta x_i \to 0$, $i = 1,2,...,n$.

2. Если положить $\Delta x_2 = \Delta x_3 = ... = \Delta x_n = 0$, то равенство (1) можно записать в виде $\Delta_{x_1} w = A_1 \Delta x_1 + \theta(\Delta x_1)$ или $\frac{\Delta_{x_1} w}{\Delta x_1} = A_1 + \frac{\theta(\Delta x_1)}{\Delta x_1}$ и перейти к пределу при $\Delta x_1 \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} w}{\Delta x_1} = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} A_1 + \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\theta(\Delta x_1)}{\Delta x_1} = A_1$, откуда следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} w}{\Delta x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}(M_0)$.

Аналогично можно доказать существование конечных частных производных $\frac{\partial w}{\partial x_2}(M_0)$, $\frac{\partial w}{\partial x_3}(M_0)$, ..., $\frac{\partial w}{\partial x_n}(M_0)$.

Следствие 1

Из доказательства теоремы следует, что числа A_i в определении дифференцируемой функции равны значениям частных производных в точке дифференцируемости. Следовательно, полное приращение функции $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$, дифференцируемой в точке M_0, можно представить в виде $\Delta w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0) \cdot \Delta x_i + \theta(\rho)$, где $\theta(\rho)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$ при всех $\Delta x_i \to 0$.

Следствие 2

Если у функции $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ не существует конечная частная производная $\frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0)$ хотя бы по одной переменной x_i, то в точке M_0 функция не является дифференцируемой.

Пример

Функция двух переменных $z = x^3\sqrt{y}$ определена на полуплоскости: $-\infty < x < +\infty$ и $0 \le y < +\infty$. Ее частные производные равны: $\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2\sqrt{y}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x^3}{2\sqrt{y}}$. Так как $\frac{\partial w}{\partial y}$ не существует при $y = 0$, то заданная функция не является дифференцируемой на луче $y = 0$, входящем в область определения.

Теорема 2. (Достаточное условие дифференцируемости).

Если функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ определена на множестве $D \subset R^n$ и имеет в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0) \in D$ непрерывные частные производные по всем переменным x_i, то она в этой точке дифференцируема.

Доказательство

При доказательстве ограничимся случаем функции двух переменных. Для функции большего числа переменных доказательство будет аналогичным.

Для функции $z = f(x, y)$ полное приращение в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Прибавим и вычтем в левой части этого соотношения значение функции $f(x_0 + \Delta x, y_0)$. Тогда Δz можно записать в следующем виде

$$\Delta z = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)) + (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_o, y_0)).$$

Применяя теорему Лагранжа к разностям функций одной переменной, стоящих в скобках, получим

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_1) \cdot \Delta y + \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_0) \cdot \Delta x, \qquad (2),$$

где $y_0 < y_1 < y_0 + \Delta y$, $x_0 < x_1 < x_0 + \Delta x$. Ясно, что при $\Delta y \to 0$, $y_1 \to y_0$ и при $\Delta x \to 0$ $x_1 \to x_0$.

Поскольку частные производные непрерывны, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0); \ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial z}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_1) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0),$$

откуда следует, что $\frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_1) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(\Delta y)$, где $\alpha(\Delta x)$ и $\beta(\Delta y)$ - бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Учитывая это, соотношение (2) можно переписать в следующем виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x + \beta(\Delta y) \cdot \Delta y.$$

Заметим, что выражение $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x + \beta(\Delta y) \cdot \Delta y$ представляет собой бесконечно малую функцию при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, имеющую более высокий порядок, чем Δx и Δy. Если обозначить эту бесконечно малую функцию $\theta(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, то полное приращение функции запишется в виде: $\Delta z = A_1 \cdot \Delta x + A_2 \cdot \Delta y + \theta(\rho)$, где A_1 и A_2 - вещественные числа, а $\theta(\rho)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Следовательно, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0.

2.3. Производная сложной функции. Полная производная

Теорема 1

Пусть на множестве $D \subset R^n$ задана дифференцируемая по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ и функции $x_1 = x_1(v_1, v_2, ..., v_n)$, $x_2 = x_2(v_1, v_2, ..., v_n), ...,$ $x_n = x_n(v_1, v_2, ..., v_n)$ в свою очередь являются дифференцируемыми функциями m независимых переменных $v_1, v_2, ..., v_m$. Тогда функция w является сложной дифференцируемой функцией независимых переменных $v_1, v_2, ..., v_m$ и частные производные от функции w по этим переменным равны:

$$\frac{\partial w}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v_j}, \text{ где } j = 1,2,..., m.$$

Доказательство

Из дифференцируемости функции w следует, что $\Delta w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i + \theta(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$. Тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta v_j} + \frac{\theta(\rho)}{\Delta v_j}.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\Delta v_j \to 0$, зафиксировав все остальные переменные v_k. Получим

$$\lim_{\Delta v_j \to 0} \frac{\Delta_{v_j} w}{\Delta v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \lim_{\Delta v_j \to 0} \frac{\Delta_{v_j} x_i}{\Delta v_j} + \lim_{\Delta v_j \to 0} \frac{\theta(\rho)}{\Delta v_j}.$$

Из дифференцируемости функций $x_1, x_2, ..., x_n$ по переменным $v_1, v_2, ..., v_m$ следует существование конечных пределов $\lim\limits_{\Delta v_j \to 0} \frac{\Delta_{v_j} x_i}{\Delta v_j} = \frac{\partial x_i}{\partial v_j}$, а также непрерывность функций $x_1, x_2, ..., x_n$. Из непрерывности функций $x_1, x_2, ..., x_n$ следует, что $\Delta_{v_j} x_i \to 0$ при $\Delta v_j \to 0$ для всех $i = 1,2,...n$. При этом из дифференцируемости функций $x_1, x_2, ..., x_n$ следует также, что $\theta(\rho)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δv_j и, значит, $\lim\limits_{\Delta v_j \to 0} \frac{\theta(\rho)}{\Delta v_j} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta v_j \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta v_j} = \frac{\partial w}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v_j}$, при всех $j = 1,2,..., m$. Теорема доказана.

В частном случае, для сложной функции двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, частные производные по независимым переменным u и v вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пример 1

Задана сложная функция $w=2^{\frac{xy}{z}}$, где $x=\frac{u}{v}$, $y=\sqrt{u}$, $z=v^2+3v$. Вычислите частные производные $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Решение

Используя формулу производной сложной функции $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$ и вычислив частные производные по переменной x: $\frac{\partial w}{\partial x}=2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{y}{z}$, по переменной y: $\frac{\partial w}{\partial y}=2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{x}{z}$, и по переменной z: $\frac{\partial w}{\partial z}=-2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{xy}{z^2}$, а также частные производные от переменных x, y, z по независимым переменным u и v: $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v}$,

$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$, $\frac{\partial z}{\partial u}=0$, получим выражение для частной производной функции w по переменной u.

$$\frac{\partial w}{\partial u}=2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{v}+2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Аналогично, выражение для частной производной функции w по независимой переменной v получим, используя формулу производной сложной функции $\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$, и, вычислив все входящие в нее частные производные $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial y}{\partial v}=0$, $\frac{\partial z}{\partial v}=2v+3$.

$$\frac{\partial w}{\partial v}=-2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{u}{v^2}-2^{\frac{xy}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{xy}{z^2}\cdot(2v+3).$$

Следствие 1

Если на множестве $D\subset R^n$ задана дифференцируемая по переменным $x_1, x_2,..., x_n$ функция $w=f(x_1, x_2,..., x_i,..., x_n)$ и если функции $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t),....., x_n=x_n(t)$ - дифференцируемые функции независимой переменной t, то функция w является сложной дифференцируемой функцией одной переменной t и ее *полная производная* по независимой переменной t равна:

$$\frac{dw}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}.$$

Пример 2

Найти полную производную по t от функции $z=\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{\sqrt[3]{y}}$, если $x=t\cdot\ln t$, $y=\operatorname{tg}^3 t$.

Решение

По формуле полной производной $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{1}{1+(xy)^2} \cdot y = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{1+(xy)^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{1+(xy)^2} - x \cdot \sqrt[3]{y} - \operatorname{arctg}(xy) \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{\frac{3xy}{1+(xy)^2} - \operatorname{arctg}(xy)}{3\sqrt[3]{y^4}},$$

$$\frac{dx}{dt} = \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = 3\operatorname{tg}^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = 3 \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}.$$

Подставляя вычисленные производные в формулу, получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{1+(xy)^2} \cdot (\ln t + 1) + \frac{\frac{3xy}{1+(xy)^2} - \operatorname{arctg}(xy)}{3\sqrt[3]{y^4}} \cdot 3 \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Иногда функция w явно зависит от переменной t, то есть $w = f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. В этом случае формула для полной производной имеет вид: $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$.

Здесь следует различать частную производную $\frac{\partial w}{\partial t}$, которая вычисляется в предположении, что x_1, $x_2, \ldots, x_n$ не зависят от переменной t, и полную производную $\frac{dw}{dt}$, которая учитывает и зависимость от t функций x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Пример 3

$z = t \cdot \cos(t + x^2 + 2y^3)$, где $x = e^{-t}$, $y = \frac{1}{t^2}$. Вычислите полную производную $\frac{dz}{dt}$.

Решение

По формуле полной производной $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Вычислим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \cos(t + x^2 + 2y^3) - t \cdot \sin(t + x^2 + 2y^3), \frac{\partial z}{\partial x} = -2xt\sin(t + x^2 + 2y^3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y^2 t\sin(t + x^2 + 2y^3), \; \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \; \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^3},$$

и подставим вычисленные производные в формулу полной производной. Получим

$$\frac{dz}{dt} = \cos(t + x^2 + 2y^3) - t \cdot \sin(t + x^2 + 2y^3) + \left(-2xt\sin(t + x^2 + 2y^3)\right) \cdot \left(-e^{-t}\right) +$$

$$+ \left(-6y^2 t\sin(t + x^2 + 2y^3)\right) \cdot \left(-\frac{2}{t^3}\right).$$

3. Дифференциал функции нескольких переменных

3.1. Определение дифференциала функции нескольких переменных и его свойства. Инвариантность формулы дифференциала

Определение

Если функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$ из ее области определения $D \subset R^n$, то линейная относительно приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ часть полного приращения функции, то есть величина $\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ называется *дифференциалом функции* $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ в точке M_0 и обозначается dw.

Учитывая замечание 1 раздела 2.2, формула для дифференциала в точке M_0 имеет вид:

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0) \cdot \Delta x_i .$$

Поскольку для независимых переменных $\Delta x_i = dx_i$, $i = 1,2,...n$, то последнюю формулу для дифференциала в произвольной точке можно записать как

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot dx_i .$$

В частности, для дифференцируемой функции двух переменных $z = f(x, y)$ формула ее дифференциала в каждой точке дифференцируемости имеет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y \text{, или } dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \cdot dy ,$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

> Следует понимать, что дифференциал функции n переменных является функцией $2n$ переменных. Чтобы вычислить его значение в некоторой точке, мало задать координаты этой точки. Следует еще задать значения приращений независимых переменных.

Пример 1

Найти значение дифференциала функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке $M_0(1,1)$, если приращения $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}03$.

Решение

По формуле полного дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$. Частные производные равны: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{x}{y^2}$. Вычислим значения частных производных в точке M_0: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2}$. Подставляя эти значения, а также значения Δx и Δy в формулу дифференциала, получим $dz = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}03 = -0{,}005$.

Теорема 1

Дифференциал $dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot dx_i$ обладает свойством инвариантности формы, то есть формула для него сохраняет свой вид, если $x_1, x_2, ..., x_n$ не простые независимые переменные, а являются функциями переменных $v_1, v_2, ..., v_m$. В этом случае дифференциалы $dx_i \neq \Delta x_i$, а в свою очередь вычисляются по формулам $dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial v_j}(v_1, v_2, ..., v_m) \cdot dv_j$, $i = 1, 2, ..., n$.

Доказательство этой теоремы легко провести самостоятельно.

Если $u = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ и $w = g(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ - функции n переменных, то при вычислении дифференциалов справедливы следующие правила:

1. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, где $c = const$;
2. $d(u \pm w) = du \pm dw$;
3. $d(u \cdot w) = u \cdot dw + w \cdot du$;
4. $d\left(\frac{u}{w}\right) = \frac{du \cdot w - u \cdot dw}{w^2}$;
5. $df(w) = f'_w \cdot dw$.

Эти правила удобно использовать при вычислении дифференциалов сложных функций.

Пример 2

Найти дифференциал функции трех переменных $w = 3^{xyz}$.

Решение

$$dw = \left(3^{xyz}\right)'_{xyz} \cdot d(xyz) = 3^{xyz} \cdot \ln 3 \cdot (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz).$$

3.2. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

Теорема

Если функция $z = f(x, y)$ - дифференцируема в точке (x_0, y_0), то существует не параллельная оси Oz касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, уравнение которой имеет вид

$$Z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Доказательство

Напомним, что функция двух переменных $z = f(x, y)$ задает в пространстве с введенной декартовой системой координат некоторую поверхность.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Если $C \neq 0$, то можно разрешить это уравнение относительно переменной z, тогда получим уравнение $z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$, где $a = -\frac{A}{C}$, $b = -\frac{B}{C}$.

Выясним, при каких значениях параметров a и b это уравнение является уравнением касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Положив в этом уравнении $y = y_0$, получим уравнение прямой $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 + a(x - x_0) \end{cases}$, которая при $a = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ является уравнением касательной к кривой, заданной системой $\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(x, y) \end{cases}$, в точке (x_0, y_0).

Положив в этом уравнении $x = x_0$, получим уравнение прямой $\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 + b(y - y_0) \end{cases}$, которая при $b = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ является уравнением касательной к кривой $\begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x, y) \end{cases}$ в точке (x_0, y_0).

Ясно, что обе эти касательные прямые принадлежат искомой касательной плоскости (рис.8). Поскольку через две пересекающиеся прямые можно провести только одну плоскость, то уравнение $z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ является уравнением касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) при $a = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ и $b = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.

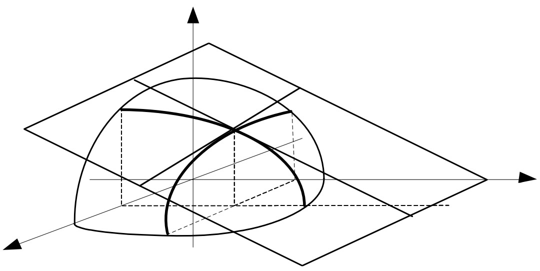

Рис.8.

Следствие 1

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, и функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то уравнение нормали к этой поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Следствие 2

Полагая в уравнении касательной плоскости $z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$, $x - x_0 = \Delta x$ и $y - y_0 = \Delta y$, можно установить, что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y = z - z_0,$$

то есть дифференциал функции двух переменных равен *приращению аппликаты касательной плоскости.*

Пример

Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = \ln\left(x + y^2\right)$ в точке $(1,0)$.

Решение

Частные производные заданной функции равны $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}$.

Вычислим значения частных производных в точке $(1,0)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = 0$.

Значение функции в точке $(1,0)$ $z_0 = \ln 1 = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид: $z = 0 + 1\cdot(x - 1) + 0\cdot(y - 0)$, или $z = x - 1$. Уравнение нормали: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$.

3.3. Приближенные вычисления и оценка погрешностей

Из определения дифференциала $dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0)\cdot \Delta x_i$ функции нескольких переменных $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ следует важный вывод. В тех случаях, когда модули приращений $|\Delta x_i|$ достаточно малы, можно заменять приращение функции в некоторой точке $M(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)$ ее дифференциалом, так как они отличаются на бесконечно малую более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$. Погрешность, появляющаяся при такой замене, не превосходит ρ. Этим пользуются при вычислении приближенных значений дифференцируемых функций.

Пример

Вычислить приближенно $\sqrt{3{,}01^2 + 3{,}98^2}$.

Решение

Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Необходимо вычислить ее значение в точке $M(3{,}01; 3{,}98)$. Представим $z = z_0 + \Delta z$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $x_0 = 3,\ y_0 = 4$. Тогда $z_0 = 5$. Теперь представим $x = 3{,}01 = x_0 + \Delta x$ и $y = 3{,}98 = y_0 + \Delta y$. Так как $x_0 = 3$ и $y_0 = 4$, то $\Delta x = 0{,}01$, а $\Delta y = -0{,}02$. Поскольку Δx и Δy достаточно малы, то заменим приращение функции Δz ее дифференциалом $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$. Для этого вычислим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $(3,4)$. Получим $\frac{\partial z}{\partial x}(3,4) = 0{,}6$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(3,4) = 0{,}8$. Тогда дифференциал в точке $(3,4)$ при $\Delta x = 0{,}01$ и $\Delta y = -0{,}02$ равен

$$dz = 0{,}6\cdot 0{,}01 + 0{,}8\cdot(-0{,}02) = 0{,}006 - 0{,}016 = -0{,}01.$$

Следовательно, приближенное значение функции равно $z_0 + dz = 5 - 0{,}01 = 4{,}99$. При этом верхняя граница абсолютной погрешности Δ определяется из равенства:

$$\Delta = \left|\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \cdot |\Delta y|.$$

В рассмотренном примере $\Delta = 0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}8 \cdot 0{,}02 = 0{,}006 + 0{,}016 = 0{,}022$.

4. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Пусть функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ имеет частные производные в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0\right)$ из ее области определения $D \subset R^n$. Будем называть их частными производными первого порядка. Так как они являются функциями тех же переменных, что и данная функция, то у каждой из них могут существовать частные производные по любому из этих аргументов.

Полученные таким образом частные производные называются *частными производными второго порядка.*

В частности для функции двух переменных $z = f(x, y)$ можно составить четыре частных производных второго порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2}\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2}\,; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z''_{xy}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z''_{yx}\,.$$

Вообще для каждой из этих частных производных второго порядка можно дать и строгое определение.

Определение 1

Если существует и конечен $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x}$, то он называется *частной производной второго порядка от* z *по* x *дважды* в точке (x_0, y_0) и обозначается $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ или z''_{x^2}.

Аналогично даются строгие определения для остальных частных производных второго порядка. Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка, и.т.д.

Для функции $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ частная производная пятого порядка $\dfrac{\partial^5 w}{\partial^2 x_i\ \partial^2 x_j\ \partial x_n}$, если она существует, определяется как функция, полученная из данной путем двукратного дифференцирования по переменным x_i и x_j, и однократного дифференцирования по x_n. Порядок дифференцирования при этом не имеет значения, так как имеет место теорема, которая в данном курсе приводится без доказательства.

Теорема 1

Если функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ имеет как в точке M_0, так и в некоторой ее окрестности частную производную второго порядка $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}$, причем она непрерывна в точке M_0, то в этой точке существует и частная производная $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}$, совпадающая с частной производной $\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$.

Обобщая теорему на производные более высокого порядка, можно сделать вывод, что при соблюдении указанных условий результат частного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования**.**

Пример 1

Вычислить все частные производные второго порядка для функции $w = x \cdot z^2 + \cos\frac{x}{y}$.

Решение

Учитывая результат теоремы, можно установить, что существует шесть различных частных производных второго порядка для данной функции.

Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = z^2 - \sin\tfrac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sin\tfrac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2xz.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\cos\tfrac{x}{y} \cdot \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\cos\tfrac{x}{y} \cdot \frac{x^2}{y^4} - \sin\tfrac{x}{y} \cdot \tfrac{2x}{y^3}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2x;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \cos\tfrac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^3} + \sin\tfrac{x}{y} \cdot \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 2z; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0.$$

Определение 2

Пусть функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$. Тогда в этой точке существует дифференциал $dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot dx_i$. Будем в дальнейшем называть его дифференциалом первого порядка или первым дифференциалом. *Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом* функции w в точке M_0 называется дифференциал от ее первого дифференциала $d(dw)$, который обозначается $d^2 w$.

Теорема 2

Если задана дифференцируемая функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ и $x_1, x_2, ..., x_n$ - независимые переменные, то имеет место формула

$$d^2 w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot dx_i \cdot dx_j.$$

Доказательство

Так как $x_1, x_2, ..., x_n$ - независимые переменные, то $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ - тоже независимые переменные. Поэтому

$$d^2w = d(dw) = d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n)\cdot dx\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\cdot dx_i .$$

Поскольку $d\left(\dfrac{\partial w}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\cdot dx_j$, то

$$d^2w = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_n)\cdot dx_i \cdot dx_j .$$

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$, учитывая независимость частных производных от порядка дифференцирования, справедливо:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot (dx)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot (dy)^2 .$$

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Дифференциал третьего порядка или третий дифференциал – это дифференциал от второго дифференциала.

Легко показать, что для функции двух переменных $z = f(x, y)$ формула для третьего дифференциала имеет вид:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\cdot (dx)^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\cdot (dx)^2 dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\cdot dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cdot (dy)^3 .$$

Формулы для второго дифференциала функции двух переменных $z = f(x, y)$ удобно записывать в символическом виде:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^2 z ,$$

где под записью $\dfrac{\partial}{\partial x}$ понимается операция взятия частной производной по переменной x, а под записью $\dfrac{\partial}{\partial y}$ понимается операция взятия частной производной по переменной y.

В общем случае для дифференциала n - го порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$ справедлива формула:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Следует помнить, что эти формулы записаны в предположении, что x и y - независимые переменные. Если же $z = f(x, y)$ является сложной функцией, в которой x и y в свою очередь являются функциями двух переменных, то

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot d^2x + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot d^2y =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot dy \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot d^2 x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot d^2 y =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + 2 \, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 y \, .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Сравнивая формулы для дифференциала второго порядка в случае, когда что x и y - независимые переменные, и когда они в свою очередь являются функциями двух переменных, можно сделать вывод, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

При вычислении дифференциалов высших порядков иногда удобно не пользоваться полученными формулами, а вычислять дифференциалы, проводя непосредственное дифференцирование, учитывая, что $d^n w = d\left(d^{n-1} w\right)$ и $d^n x_i = 0$ при условии $n \geq 2$, если x_i - независимая переменная.

Пример 2

Вычислите $d^3 z$, если $z = \cos(x - 5y)$.

Решение

По формуле для дифференциала суперпозиции двух функций первый дифференциал можно записать в виде

$$dz = -\sin(x - 5y) \cdot (dx - 5\, dy) \, .$$

Поскольку выражение $dx - 5dy$ не зависит от переменных x и y, то второй дифференциал имеет вид

$$d^2 z = -\cos(x - 5y) \cdot (dx - 5dy)^2 \, .$$

Аналогично вычисляется третий дифференциал

$$d^3 z = \sin(x - 5y) \cdot (dx - 5dy)^3 \, .$$

Пример 3

Вычислите $d^2 w$, если $w = 3^{xyz}$.

Решение

В разделе 2.4 был вычислен $dw = 3^{xyz} \cdot \ln 3 \cdot (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$. Тогда

$$d^2 w = \ln 3 \left(d\left(3^{xyz}\right) \cdot (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz) + 3^{xyz} \; d(yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz) \right)$$

$$d^2 w = 3^{xyz} \cdot \ln^2 3 \cdot (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)^2 + 3^{xyz} \cdot \ln 3 \cdot \left((dy \cdot z + y \cdot dz) \cdot dx + (dx \cdot z + x \cdot dz) \cdot dy + \right.$$

$$\left. + (dx \cdot y + x \cdot dy) \cdot dz \right).$$

Упрощая полученное выражение, запишем

$$d^2 w = 3^{xyz} \cdot \ln^2 3 \cdot \left(y^2 z^2 (dx)^2 + x^2 z^2 (dy)^2 + x^2 y^2 (dz)^2 \right) +$$

$$+ 3^{xyz} \cdot 2 \ln 3 \cdot (1 + xyz \cdot \ln 3) \cdot (z \cdot dx \cdot dy + \cdot x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot dz) \, .$$

5. Производные функций нескольких переменных, заданных неявно

5.1. Неявная функция. Дифференцируемость неявной функции. Формула для частных производных функции двух переменных, заданной неявно.

Определение

Функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется заданной неявно в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, w_0)$, если задано уравнение $F(x_1, x_2, ..., x_n, w) = 0$ и если:

- $F(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, w_0) = 0$;
- $\forall M(x_1, x_2, ..., x_n) \in U_\delta(M_0)$ $\exists$ единственное $w \in U_\delta(w_0)$: $F(x_1, x_2, ..., x_n, w) = 0$.

В частности, уравнение $F(x, y, z) = 0$ в окрестностях тех точек (x_0, y_0, z_0), для которых уравнение $F(x_0, y_0, z) = 0$ имеет хотя бы один корень z_0, задает неявную функцию $z = f(x, y)$, значения которой равны корням этого уравнения.

При этом уравнение $F(x, y, z) = 0$ иногда может быть разрешено относительно z, а иногда нет. Не следует путать вопрос о существовании неявной функции с вопросом получения ее в виде явной зависимости. Следующая теорема дает условия существования, единственности и дифференцируемости неявной функции.

Теорема 1

Если функция $F(x_1, x_2, ..., x_n, w)$:

- непрерывна в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, w_0)$;
- имеет в этой окрестности непрерывные частные производные по всем переменным;
- $F(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, w_0) = 0$;
- $F'_w(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, w_0) \neq 0$;

то уравнение $F(x_1, x_2, ..., x_n, w) = 0$ задает в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, w_0)$ однозначную дифференцируемую функцию $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которой справедливо $w_0 = F(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

Доказательство

В силу сложности и громоздкости доказательства этой теоремы, рассмотрим ее доказательство только для функции двух переменных $y = f(x)$, заданной неявной зависимостью $F(x, y) = 0$, где функция $F(x, y)$ непрерывна и дифференцируема в некоторой δ - окрестности точки (x_0, y_0) и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Если точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности, то

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ и } F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0,$$

тогда и $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0$. Для левой части последнего равенства можно использовать теорему Лагранжа.

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = [F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0 + \Delta x, y_0)] +$$
$$+ [F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)] = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0 + \Delta x, y_0) \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0+\Delta x,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$. Переходя в нем к пределу при $\Delta x\to 0$ и учитывая, что частные производные непрерывны, получим

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0+\Delta x,y_0)}\right)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Мы не только доказали дифференцируемость функции $y=f(x)$, но и получили формулу для вычисления ее производной.

$$y'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Аналогично доказывается, что функция двух переменных $z=f(x,y)$, заданная уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ - дифференцируемая по всем переменным функция, дифференцируема в точках, в которых $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ и ее частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Пример 1

Выясните, в каких точках дифференцируема функция $y=f(x)$, заданная неявно, и вычислите ее производную, если $\frac{x}{y}+e^{xy}=0$.

Решение

$F(x,y)=\frac{x}{y}+e^{xy}$. Поэтому функция дифференцируема во всех точках, за исключением тех, где $\frac{\partial F}{\partial y}=0$. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+e^{xy}\cdot x$, то функция дифференцируема везде, где выполняется условие $-\frac{x}{y^2}+e^{xy}\cdot x\neq 0$. Так как $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{y}+e^{xy}\cdot y$, то

$$y'_x=-\frac{\frac{1}{y}+e^{xy}\cdot y}{-\frac{x}{y^2}+e^{xy}\cdot x}.$$

Пример 2

Выясните, в каких точках дифференцируема функция $z=f(x,y)$, заданная неявно, и вычислите ее производную, если $\frac{x}{z}+z\cdot\cos(xy)=0$.

Решение

Так как $F(x,y,z)=\frac{x}{z}+z\cdot\cos(xy)$, то функция дифференцируема во всех точках, за исключением тех, в которых $\frac{\partial F}{\partial z}=0$. $\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}+\cos(xy)$, следовательно, функция дифференцируема везде, где выполняется условие $-\frac{x}{z^2}+\cos(xy)\neq 0$. Учитывая, что $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{z}-\sin(xy)\cdot zy$ и $\frac{\partial F}{\partial y}=-\sin(xy)\cdot zx$, можно записать

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{1}{z}-\sin(xy)\cdot zy}{-\frac{x}{z^2}+\cos(xy)};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-\sin(xy)\cdot zx}{-\frac{x}{z^2}+\cos(xy)}.$$

5.2. Производные неявных функций, заданных системой уравнений. Определитель Якоби

Пример 1

Функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$ заданы системой $\begin{cases} xy+u^2=-y \\ uw+y^2=0 \end{cases}$. Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Решение

Продифференцируем оба уравнения системы по переменной x. Получим $\begin{cases} y+2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}\cdot w+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=0 \end{cases}$, или $\begin{cases} 2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-y \\ \frac{\partial u}{\partial x}\cdot w+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=0 \end{cases}$. Решая эту систему относительно неизвестных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -y & 0 \\ 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}}=\frac{-yu}{2u^2}=-\frac{y}{2u};\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} 2u & -y \\ w & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}}=\frac{yw}{2u^2}.$$

Теперь продифференцируем оба уравнения системы по переменной y. Получим $\begin{cases} x+2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=-1 \\ \frac{\partial u}{\partial y}\cdot w+u\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+2y=0 \end{cases}$, или $\begin{cases} 2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=-x-1 \\ \frac{\partial u}{\partial y}\cdot w+u\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=-2y \end{cases}$. Если решить эту систему относительно производных $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$, то формулы для них будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} -x-1 & 0 \\ -2y & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}}=\frac{-xu-u}{2u^2}=-\frac{x+1}{2u},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} 2u & -x-1 \\ w & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix}}=\frac{-4yu+xw+w}{2u^2}.$$

Из полученных формул для частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ видно, что неявные функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$ не являются дифференцируемыми в точках, в которых определитель $\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ w & u \end{vmatrix} = 0$, или $u = 0$. Такой определитель называется *определителем Якоби.*

Определение

Если неявные функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$ заданы системой $\begin{cases} F_1(x,y,u,w) = 0 \\ F_2(x,y,u,w) = 0 \end{cases}$, то определитель $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix}$ называется *определителем Якоби.*

Имеет место следующая теорема, которая легко обобщается на случай большего числа переменных.

Теорема

Если задана система $\begin{cases} F_1(x,y,u,w) = 0 \\ F_2(x,y,u,w) = 0 \end{cases}$, где $F_1(x,y,u,w)$ и $F_2(x,y,u,w)$ непрерывные и дифференцируемые по всем переменным в окрестности точки $M_0(x_0,y_0,u_0,w_0)$, являющейся решением системы, функции и если в точке M_0 определитель Якоби $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$, то система определяет функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$, которые являются дифференцируемыми в точке M_0.

Пример 2

Определите, при каком условии система уравнений $\begin{cases} u^2 - w^2 + x^2 + y^2 = 0 \\ uw + xy = 0 \end{cases}$ задает дифференцируемые функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$, и вычислите du, dw и d^2u.

Решение

Вычислим определитель Якоби $I = \begin{vmatrix} 2u & -2w \\ w & u \end{vmatrix} = 2u^2 + 2w^2$. Поскольку $I = 0$ только при $u = w = 0$, то во всех точках, кроме начала координат заданная система определяет две неявные дифференцируемые функции $u(x,y)$ и $w(x,y)$.

Теперь вычислим du, дифференцируя оба уравнения системы

$$\begin{cases} d\left(x^2 + y^2 + u^2 - w^2\right) = 0 \\ d(uw + xy) = 0 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2udu - 2wdw = 0 \\ u \cdot dw + w \cdot du + dx \cdot y + dy \cdot x = 0 \end{cases} \quad (1),$$

$$\begin{cases} 2udu - 2wdw = -2xdx - 2ydy \\ w \cdot du + u \cdot dw = -y \cdot dx - x \cdot dy \end{cases}.$$

Решая последнюю систему относительно du, получим

$$du = -\frac{xu + yw}{u^2 + w^2}dx - \frac{yu + xw}{u^2 + w^2}dy, \quad dw = \frac{-yu + xw}{u^2 + w^2}dx + \frac{xu + yw}{u^2 + w^2}dy.$$

Вычислим вторые дифференциалы в системе (1)

$$\begin{cases} 2dx^2 + 2dy^2 + 2du^2 - 2dw^2 + 2u \cdot d^2u - 2w \cdot d^2w = 0 \\ w \cdot d^2u + du \cdot dw + u \cdot d^2w + dw \cdot du + dx \cdot dy + dy \cdot dx = 0 \end{cases}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} u \cdot d^2u - w \cdot d^2w = -dx^2 - dy^2 - du^2 + dw^2 \\ w \cdot d^2u + u \cdot d^2w = -2du \cdot dw - 2dx \cdot dy \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно d^2u, получим выражение для второго дифференциала

$$d^2u = -\frac{u\left(dx^2 + dy^2 + du^2 - dw^2\right) + 2w\left(du\,dw + dx\,dy\right)}{u^2 + w^2}.$$

Окончательно в это равенство нужно подставить выражения для дифференциалов du и dw.

6. Экстремум функции нескольких переменных

6.1. Формула Тейлора для функции n переменных

Если функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n раз дифференцируема в окрестности точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, то в некоторой окрестности $U_\delta(M_0)$ эту функцию можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) + \frac{df\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)}{1!} + \frac{d^2f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)}{2!} +$$
$$... + \frac{d^nf\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)}{n!} + \frac{d^{(n+1)}\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\right)}{(n+1)!},$$

где $x_1^0 < \tilde{x}_1 < x_1$, $x_2^0 < \tilde{x}_2 < x_2, ...$, $x_n^0 < \tilde{x}_n < x_n$; а dx_i в выражениях для дифференциалов $d^nf\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ полагаются равными $x_i - x_i^0$.

Эта формула называется *формулой Тейлора* для функции $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Если $x_1^0 = x_2^0 = ... = x_n^0 = 0$, то формула называется *формулой Маклорена.*

Если $dx_i = x_i - x_i^0$ бесконечно малые, то последний член формулы Тейлора $\frac{d^{(n+1)}\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\right)}{(n+1)!}$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем каждая из бесконечно малых dx_i.

6.2. Экстремум функции двух переменных

Определение 1

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $D \subset R^2$, а $M_0(x_0, y_0)$ - внутренняя точка этой области. Точка M_0 называется точкой *минимума* функции $f(x, y)$, если

$$\exists U_\delta(M_0) : \forall M(x, y) \in U_\delta(M_0) \Rightarrow f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Определение 2

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $D \subset R^2$, а $M_0(x_0,y_0)$ - внутренняя точка этой области. Точка M_0 называется точкой *максимума* функции $f(x,y)$, если

$$\exists U_\delta(M_0): \forall M(x,y) \in U_\delta(M_0) \Rightarrow f(x,y) \le f(x_0,y_0).$$

Теорема 1

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в этой точке экстремум (максимум или минимум), то $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$.

Доказательство

Если рассмотреть функцию одной переменной $f(x,y_0)$, то она имеет экстремум в точке x_0. По необходимому условию экстремума для функции одной переменной $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Доказанная теорема называется необходимым условием экстремума функции двух переменных. Условие равенства нулю частных производных в некоторой точке не является достаточным условием существования экстремума в этой точке.

Следствие

Если хотя бы одна из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \ne 0$ или $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \ne 0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет экстремума.

Значит, экстремум следует искать в тех точках, в которых обе частные производные равны нулю. Так же как и для функции одной переменной экстремум может быть и в точках, где функция не является дифференцируемой. Такие точки в дальнейшем будем называть подозрительными на экстремум или критическими. Среди критических точек особо выделяются стационарные точки.

Определение

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется *стационарной точкой* функции $f(x,y)$, если $f(x,y)$ дифференцируема в этой точке и $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$, или $df(x_0,y_0)=0$.

Теорема2

Если $M_0(x_0,y_0)$ - стационарная точка дважды дифференцируемой функции $f(x,y)$ и если в некоторой окрестности этой точки $d^2 f(x_0,y_0)$ сохраняет знак, то функция в точке M_0 имеет экстремум. При этом если $d^2 f(x_0,y_0) > 0$, то этот экстремум минимум. Если $d^2 f(x_0,y_0) < 0$, то это максимум.

Доказательство

Представим функцию $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ формулой Тейлора до членов второго порядка: $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \frac{d^3 f(\tilde{x},\tilde{y})}{3!}$. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $(dx)^3 = (x-x_0)^3$ и

$(dy)^3 = (y - y_0)^3$, учитывая, что в стационарной точке $df(x_0, y_0) = 0$, формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \frac{d^3 f(\tilde{x}, \tilde{y})}{3!}, \text{ где } x_0 < \tilde{x} < x,\ y_0 < y < \tilde{y}.$$

Из формулы дифференциала 3 - го порядка ясно, что при достаточно малых $x - x_0,\ y - y_0$ $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!}$. Из последнего соотношения ясно, что если $d^2 f(x_0, y_0) > 0$, то в некоторой окрестности $U_\delta(M_0)$ выполняется неравенство $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, что соответствует определению минимума. Если же $d^2 f(x_0, y_0) < 0$, то в некоторой окрестности $U_\delta(M_0)$ имеем неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, из которого следует, что в точке M_0 максимум.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если $d^2 f(x_0, y_0)$ меняет знак в окрестности точки M_0, то это еще не означает, что в этой точке нет экстремума.

Пример 1

Функция $z = x^4 + y^2 - 4x$ имеет в точке $(1,0)$ минимум. Это следует из того, что $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y \end{cases}$ и единственная стационарная точка $(1,0)$. Частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,0) = 12$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,0) = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,0) = 0$.

Тогда $d^2 z(1,0) = 12 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot (dy)^2 \geq 0$.

Теорема 3

Если $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка дважды дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ и если $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, то функция имеет экстремум, если $AC - B^2 > 0$ и не имеет экстремума, если $AC - B^2 < 0$. При этом экстремум - максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$.

Доказательство

В теореме 2 доказаны достаточные условия экстремума: если $d^2 z(x_0, y_0) \geq 0$, то в точке M_0 минимум; если $d^2 z(x_0, y_0) \leq 0$, то в точке M_0 максимум. Рассмотрим

$$d^2 z(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (dy)^2, \text{ или}$$

$$d^2 z(x_0, y_0) = A(dx)^2 + 2B \cdot dx \cdot dy + C(dy)^2.$$

Вынесем $(dy)^2$ за скобку $d^2z(x_0,y_0)=\left(A\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2B\cdot\frac{dy}{dx}+C\right)\cdot(dy)^2$ и обозначим $\frac{dy}{dx}=t$. Тогда

$$d^2z(x_0,y_0)=\left(A\cdot t^2+2B\cdot t+C\right)\cdot(dy)^2.$$

Чтобы выражение $d^2z(x_0,y_0)$ было определенного знака, дискриминант D квадратного трехчлена $A\cdot t^2+2B\cdot t+C$ должен быть меньше нуля. $D=4B^2-4AC=4\left(B^2-AC\right)$. Следовательно, при $B^2-AC<0$, или при $AC-B^2>0$ есть экстремум. При $AC-B^2<0$ нет экстремума.

Если $AC-B^2>0$, то при $A>0$ квадратный трехчлен $A\cdot t^2+2B\cdot t+C>0$ и экстремум является минимумом; при $A>0$ квадратный трехчлен $A\cdot t^2+2B\cdot t+C<0$ и экстремум является максимумом.

ЗАМЕЧАНИЕ

> Если $AC-B^2=0$ экстремум может быть, а может и не быть. Этот случай требует дополнительных исследований.

Пример 2

Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-9xy+27$.

Решение

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-9y\\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-9x\end{cases},\quad \begin{cases}3x^2-9y=0\\ 3y^2-9x=0\end{cases},\quad \begin{cases}x^2=3y\\ 9y^2-27x=0\end{cases},\quad \begin{cases}x^2=3y\\ x^4-27x=0\end{cases},$$

$\begin{cases}x^2=3y\\ x\left(x^3-27\right)=0\end{cases}$. Системе удовлетворяют две стационарные точки $(0,0)$ и $(3,3)$.

Вычислим частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-9$.

Для первой стационарной точки $(0,0)$: $A=C=0,\quad B=-9$. Дискриминант $D=AC-B^2=-81<0$. Значит, в этой точке нет экстремума. Для точки $(3,3)$: $A=C=18$, $B=-9$. Дискриминант $D=324-81>0$, а так как $A>0$, то это точка минимума.

6.3. Экстремум функций n переменных

Определения и теоремы 6.1 и 6.2 легко обобщаются на функции n переменных. Предоставляем Вам возможность, сделать это самостоятельно.

Пример

Исследовать на экстремум функцию $w=x^4+y^2+z^2-2z$.

Решение

Стационарные точки находим из системы $\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 4x^3 = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 2y = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 2z - 2 = 0 \end{cases}$, из которой видно, что единственной стационарной точкой является точка $M_0(0{,}0{,}1)$. Вычислим все частные производные второго порядка: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0.$$

Тогда второй дифференциал в стационарной точке равен:

$$d^2 w = 12x^2 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot (dy)^2 + 2(dz)^2 + 2 \cdot 0 \cdot dx\,dy + 2 \cdot 0 \cdot dx\,dz + 2 \cdot 0 \cdot dy \cdot dz = 2 \cdot \left(6(dx)^2 + (dy)^2\right) \geq 0.$$

Следовательно, точка M_0 - точка минимума.

6.4. Наименьшее и наибольшее значения функции нескольких переменных

Теорема

Непрерывная функция $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданная на ограниченном и замкнутом множестве, принимает на этом множестве наибольшее и наименьшее значения.

Наибольшее и наименьшее значения могут достигаться в точках экстремума и на границе области, поэтому для их отыскания поступают следующим образом.

- Определяют стационарные точки функции и вычисляют значения функции в тех стационарных точках, которые содержатся внутри заданного множества.
- Вычисленные значения функции сравнивают между собой и со значениями функции на границе области. Среди них находят наибольшее и наименьшее.

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ в области, ограниченной координатными осями и прямой $x + y = 2\pi$.

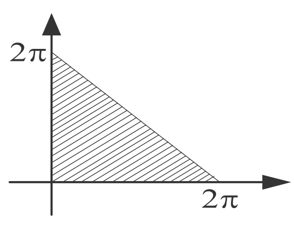

Рис.9.

Решение

Стационарные точки функции определяются из системы: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$\cos x = \cos y$, или $y = \pm x + 2\pi k$. Поскольку для заданной области $0 \le x \le 2\pi$, то достаточно взять $y = x$. Подставим это в первое уравнение. Получим $\cos x = \cos 2x$, откуда $x = 2\pi k$ или $3x = 2\pi k$. Соотношение $x = 2\pi k$ дает точки $x = 0$ и $x = 2\pi$, лежащие на границе. Из соотношения $3x = 2\pi k$ следует, что только одна стационарная точка $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ лежит внутри области (рис.9). Значение функции в этой точке $z_1 = 2\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Граница области задается уравнениями:

1. $x = 0, \quad 0 \le y \le 2\pi$. На этой части границы $z = \sin y - \sin y = 0$.
2. $y = 0, \quad 0 \le x \le 2\pi$. На этой части границы $z = \sin x - \sin x = 0$.
3. $x + y = 2\pi$ или $y = 2\pi - x$, $0 \le x \le 2\pi$. На этой части границы $z = \sin x + \sin(2\pi - x) + \sin 2\pi = 0$

Следовательно, наибольшее значение функции равно $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, а наименьшее $z_2 = 0$.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Как определяется прямое произведение множеств?
2. Как определяется расстояние между точками в n- мерном пространстве?
3. Какое пространство называется метрическим?
4. Что такое окрестность и проколотая окрестность точки в n- мерном метрическом пространстве?
5. Какая точка множества называется внутренней?
6. Какая точка множества называется граничной?
7. Какая точка множества называется предельной?
8. Какое множество называется открытым?
9. Какое множество называется замкнутым?
10. Как определяется функция n переменных?
11. Что называется пределом функции n переменных в заданной точке?
12. Какая функция n переменных называется непрерывной в точке? На множестве?
13. Как определяются частные производные функции двух переменных?
14. Каков геометрический смысл частных производных функции двух переменных?
15. Какая функция n переменных называется дифференцируемой в точке?
16. Какое условие является необходимым для дифференцируемости функции n переменных в некоторой точке?
17. Какое условие является достаточным для дифференцируемости функции n переменных в некоторой точке?
18. Что такое дифференциал функции n переменных? Как записывается его формула?
19. В чем состоит инвариантность формулы первого дифференциала?
20. Каков геометрический смысл дифференциала функции двух переменных?
21. Какой вид имеет уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$?
22. Какой вид имеет уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$?
23. Как определяются производные второго порядка функции двух переменных?
24. Какому условию удовлетворяют смешанные производные функции нескольких переменных?
25. Как выглядит формула второго и третьего дифференциала функции двух переменных?
26. Как выглядит формула производной сложной функции двух и более переменных?
27. Как выглядит формула полной производной функции нескольких переменных?
28. По каким формулам вычисляются частные производные функции двух переменных $z(x, y)$, заданной неявно?

29. При каком условии неявная функция, заданная системой, является дифференцируемой в данной точке?
30. Как выглядит формула Тейлора функции n переменных?
31. Функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ минимум. Что это означает по определению?
32. Функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ максимум. Что это означает по определению?
33. В чем состоит необходимое условие экстремума функции двух переменных?
34. Как формулируются достаточные условия экстремума функции двух переменных?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Метрическое пространство R^n. Окрестности точек в R^n. Классификация точек в R^n. Открытые и замкнутые множества.
2. Функции n переменных. Предел и непрерывность функции n переменных.
3. Частные производные функции n переменных. Частные производные функции двух переменных и их геометрический смысл.
4. Дифференцируемая функция n переменных. Необходимое условие дифференцируемости (случай функции двух переменных).
5. Дифференцируемая функция n переменных. Достаточное условие дифференцируемости (случай функции двух переменных).
6. Производная сложной функции n переменных. Полная производная функции n переменных.
7. Дифференциал функции n переменных: определение, формула дифференциала, инвариантность формулы первого дифференциала, правила дифференцирования.
8. Дифференциал функции двух переменных, его геометрический смысл. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
9. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции n переменных.
10. Производные функций n переменных, заданных неявно. Дифференцирование неявных функций, заданных системой. Определитель Якоби.
11. Экстремум функции n переменных: определение и необходимое условие. Стационарные и критические точки.
12. Формула Тейлора и Маклорена функции n переменных. Достаточные условия экстремума.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (10 часов)

7. Нахождение областей определения функций двух и более переменных. Вычисление пределов и исследование на непрерывность функций двух переменных. Вычисление частных производных. Геометрический смысл частных производных Типовой расчет по теме: «Функции нескольких переменных» (2 часа).
   Л.4: 3004, 3010, 3042, 3058,3067,3075,3091.
8. Производная сложной функции. Полная производная (2 часа).
   Л.4: 3032, 3033, 3126, 3127, 3128, 3131.
9. Дифференциал функции нескольких переменных. Оценка погрешностей приближенные вычисления. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности (2часа).
   Л.4: 3106, 3111, 3113, 3324, 3326, 3327.
10. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференцирование неявных функций (2 часа).
    Л.4:3176, 3181, 3188, 3222, 3225, 3228, 3329.
11. Экстремум функции двух переменных. Задачи на наименьшее и наибольшее значение (2 часа).
    Л.4: 3259, 3267, 3270, 3281, 3282.
12. Прием типового расчета **«Функции нескольких переменных». Контрольная работа»** (2 часа).