Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 3. Аналитическая геометрия

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 22.151.5

УДК 516

*Е.С.Баранова, Н.В.Васильева. М*атематика. Тема 3. Аналитическая геометрия. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с. 54.

Ил. 45 . Табл. 26 . Библиогр.: 4 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Аналитическая геометрия», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену, а также список рекомендуемой литературы. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 3. Аналитическая геометрия

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Н.Н. Катрушенко

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 1 - го СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план

№ темы	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Всего аудиторных	Из них		
				Лекции	Практические занятия	
1	Элементы линейной алгебры.	50	28	14	14	22
2	Векторная алгебра.	18	8	4	4	10
3	Аналитическая геометрия.	48	28	14	14	20
4	Теория пределов.	48	28	14	14	20
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1.	26	16	8	8	10
Всего за 1 семестр		190	108	54	54	82

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

3. Аналитическая геометрия (14 часов).

10. Поверхности в пространстве и их уравнения. Уравнение плоскости с нормальным вектором. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя коллинеарными векторами (2 часа).
11. Уравнение плоскости в отрезках. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнения координатных плоскостей. Линии в пространстве. Общие уравнения прямой. Канонические и параметрические уравнения прямой (2 часа).
12. Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Точка пересечения прямой и плоскости (2 часа).
13. Виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости. Кривые второго порядка, общее уравнение. Эллипс: определение, вывод канонического уравнения, форма кривой, фокусы и эксцентриситет (2 часа).
14. Гипербола: определение, вывод канонического уравнения, форма кривой, уравнения асимптот, фокусы и эксцентриситет. Парабола: определение, вывод канонического уравнения, форма кривой, фокус и уравнение директрисы (2 часа).
15. Полярная система координат. Построение кривых в полярной системе координат и кривых, заданных параметрическими уравнениями. (2 часа).
16. Поверхности второго порядка. Эллипсоид. Гиперболоиды (однополостный и двуполостный). Параболоиды (эллиптический и гиперболический). Коническая поверхность. Цилиндрические поверхности (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

1. Плоскость и прямая в пространстве

1.1. Поверхности в пространстве и их уравнения. Уравнение плоскости

Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в некоторой точке O. Произвольную точку M в этой системе координат будем задавать ее координатами $M(x, y, z)$. Вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ изображать направленным отрезком $\overrightarrow{OM}$, начало которого может быть перенесено в любую точку пространства (рис.1).

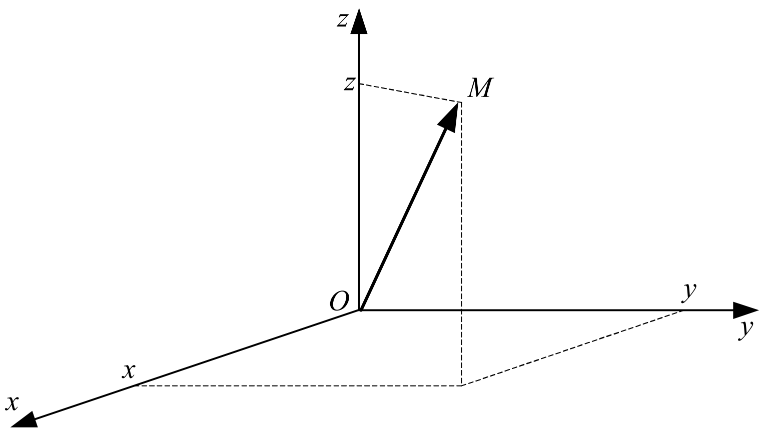

Рис.1.

Определение 1

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат, то алгебраическое уравнение $f(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности Φ в этой системе координат, если:

1. Координаты любой точки $M(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ связаны уравнением $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

2. Для любого решения (x_0, y_0, z_0) уравнения $f(x, y, z) = 0$ справедливо $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ (рис. 2).

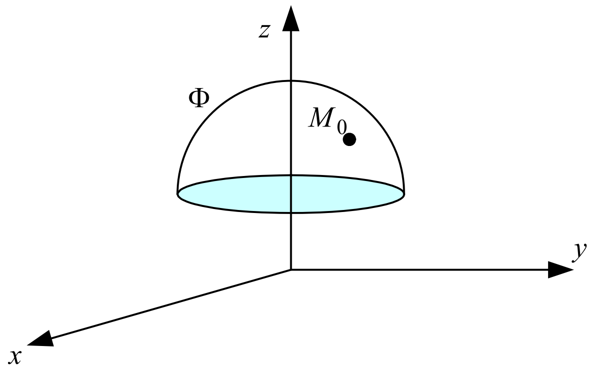

Рис. 2.

ЗАМЕЧАНИЕ

Иначе говоря, уравнение поверхности связывает координаты тех и только тех точек, которые принадлежат этой поверхности.

В дальнейшем будет дана классификация основных поверхностей, а в данном разделе мы покажем, как получить уравнение поверхности, если задано общее геометрическое свойство ее точек.

Задача

Написать алгебраическое уравнение множества точек, расположенных на расстоянии r от заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Решение

Из элементарной геометрии известно, что множество точек с таким геометрическим свойством образует сферу (поверхность шара) с центром в точке M_0 и радиусом r. Покажем, что ее уравнение имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит данной сфере. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$. Так как $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = r$ и $\left|\overrightarrow{M_0M}\right|^2 = r^2$, то $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Если же точка $M(x, y, z)$ не принадлежит сфере, то $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| > r$ или $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| < r$, и, следовательно, ее координаты x, y, z не удовлетворяют этому уравнению.

Теорема 1

Линейное уравнение с тремя переменными $Ax + By + Cz + D = 0$ задает в пространстве плоскость.

Доказательство

1. Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая плоскости, и вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, перпендикулярный плоскости. Ясно, что через данную точку перпендикулярно данному вектору можно провести только одну плоскость (рис.3).

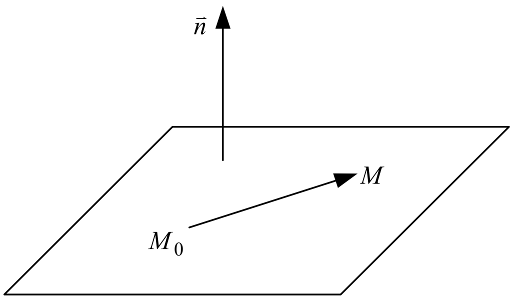

Рис. 3

Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ коллинеарен этой плоскости и ортогонален вектору $\vec{n}$. Из ортогональности векторов следует $\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0$. Выразив скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. В последнем уравнении раскроем скобки и обозначим $D = -A\,x_0 - B\,y_0 - C\,z_0$. Получим уравнение $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$. Это линейное уравнение, причем коэффициенты при переменных x, y, z - координаты нормального вектора $\vec{n}$.

2. Пусть (x_0, y_0, z_0) - какое-то решение уравнения

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0. \qquad (1)$$

Это означает, что справедливо

$$A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D = 0. \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получим

$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$, или $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Получили уравнение, которое, является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}$.

1.2. Плоскость, заданная точкой и нормальным вектором. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Уравнение плоскости с нормальным вектором

Уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где x_0, y_0, z_0 - координаты любой точки, принадлежащей плоскости, A, B, C - координаты любого вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости, называется *уравнением плоскости с нормальным вектором*. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором.*

Теорема

Если две плоскости заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, то заданы их нормальные векторы $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ и $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Угол α между плоскостями определяется как угол между их нормальными векторами. Тогда для косинуса этого угла справедлива формула:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right)}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей имеет вид:

$$\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}, \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей определяется из соотношения:

$$\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = 0, \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Задача 1

Какие из заданных точек $A(2,-2,-1)$, $B(1,0,-2)$, $C(-1,-1,4)$, $D(4,5,0)$ принадлежат плоскости, заданной уравнением $x - y + 5z + 1 = 0$?

Решение

Чтобы выяснить, лежит ли точка в плоскости, надо в уравнение плоскости подставить ее координаты. Поскольку

$$2-(-2)+5\cdot(-1)+1=0, \qquad 1-0+5\cdot(-2)+1\neq 0,$$
$$-1-(-1)+5\cdot 4+1\neq 0, \qquad 4-5+5\cdot 0+1=0,$$

то заданной плоскости принадлежат только точки A и D.

Ответ: A и D.

Задача 2

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-1,-2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, если $B(-1,2,3)$.

Решение

Вектор $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$ является нормальным вектором плоскости. В уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ подставим вместо A,B,C координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, а вместо x_0,y_0,z_0 - координаты точки A. Получим

$$-2\cdot(x-1)+3(y+1)+5\cdot(z+2)=0, \text{ или } -2x+3y+5z+15=0.$$

Ответ: $-2x+3y+5z+15=0$.

Задача 3

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1,2,-3)$, параллельно плоскости, заданной уравнением $4x+y-2z+2=0$.

Решение

Уравнение плоскости будем искать в виде: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Вместо x_0,y_0,z_0 подставим в это уравнение координаты точки M_0. Из уравнения заданной плоскости найдем координаты ее нормального вектора $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$. Так как плоскости параллельны, то этот вектор является нормальным и для искомой плоскости. Подставив его координаты в уравнение, получим

$$4\cdot(x+1)+(y-2)-2\cdot(z+3)=0, \text{ или } 4x+y-2z-4=0.$$

Ответ: $4x+y-2z-4=0$.

Задача 4

Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x-\sqrt{2}y+z-1=0$ и $x+\sqrt{2}y-z+3=0$.

Решение

Нормальные векторы заданных плоскостей $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$. Если обозначить через α - угол между плоскостями, то

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{1-2-1}{\sqrt{1+2+1} \cdot \sqrt{1+2+1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол $\alpha = 120^\circ$.

Ответ: 120°.

Задача 5

При каких значениях l и m заданные плоскости $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz - 1 = 0$ параллельны?

Решение

Нормальные векторы заданных плоскостей $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -l \end{pmatrix}$. Из условия параллельности следует: $\frac{m}{2} = \frac{3}{-5} = \frac{-2}{-l}$. Тогда $m = -\frac{6}{5}$ и $l = -\frac{10}{3}$.

Ответ: $m = -\frac{6}{5}$, $l = -\frac{10}{3}$.

1.3. Плоскость, заданная точкой и двумя коллинеарными векторами

Теорема

Если задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая плоскости, два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарные плоскости и не коллинеарные между собой, то для этой плоскости используется уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где нормальный вектор $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (рис.4).

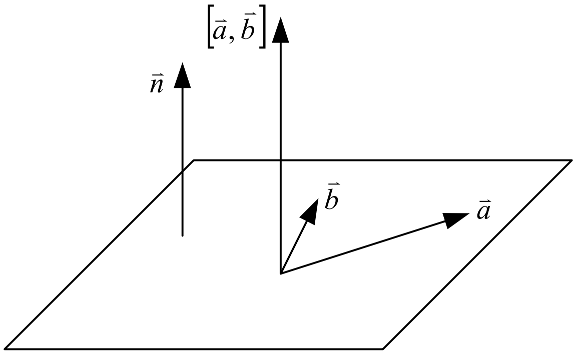

Рис. 4

Задача 1

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,-3)$, $M_2(4,-1,-4)$ и $M_3(-1,-5,2)$.

Решение

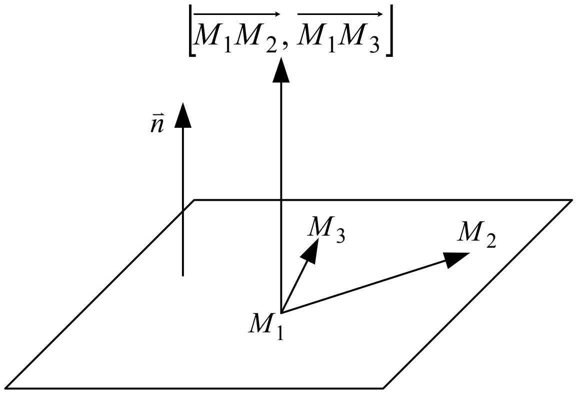

Рис. 5.

Из рисунка 5 ясно, что нормальный вектор плоскости - это вектор $\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right]$. Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$,

а также их векторное произведение

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & -1 \\ -2 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -22\vec{i} - 13\vec{j} - 27\vec{k}.$$

Следовательно, в качестве нормального вектора можно взять вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} 22 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}$.

Подставив его координаты, а также координаты любой из точек, например M_1 в уравнение плоскости с нормальным вектором, получим

$$22(x-1) + 13(y-2) + 27(z+3) = 0, \text{ или } 22x + 13y + 27z + 33 = 0.$$

Ответ: $22x + 13y + 27z + 33 = 0$.

Задача 2

Напишите уравнение плоскости проходящей через ось Ox и через точку $M(1,1,1)$.

Решение

Для искомой плоскости известны координаты точки, лежащей на плоскости, это $O(0,0,0)$ или $M(1,1,1)$. Поскольку векторы $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM}$, коллинеарны плоскости, то нормальный вектор $\vec{n} = \left[\overrightarrow{OM}, \vec{i}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, а тогда, подставляя координаты точки O и координаты вектора $\vec{n}$ в уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, получим

$$0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-0) = 0, \text{ или } y - z = 0.$$

Ответ: $y - z = 0$.

1.4. Уравнение плоскости в отрезках

Теорема

Если плоскость пересекает все три координатные оси и заданы абсцисса a точки пересечения плоскости с осью Ox, ордината b точки пересечения плоскости с осью Oy и аппликата c точки пересечения плоскости с осью Oz, то уравнение плоскости может быть записано в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках, а числа a, b и c - «отрезками».

Доказательство

Для доказательства воспользуемся тем, что заданная плоскость проходит через точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ и $C(0,0,c)$ (рис. 6). Нормальным вектором плоскости является вектор $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

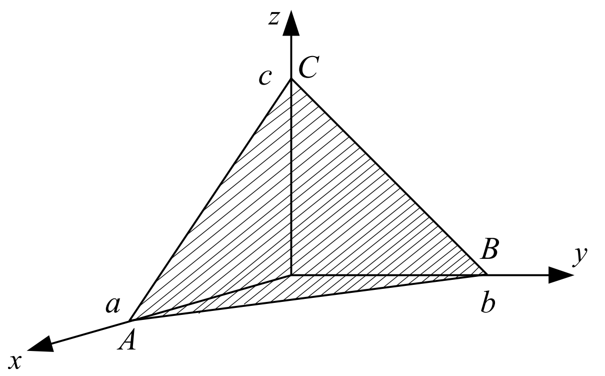

Рис. 6

Поскольку $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-a\\ b\\ 0\end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-a\\ 0\\ c\end{pmatrix}$, то $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=bc\,\vec{i}+ac\,\vec{j}+ab\,\vec{k}=\begin{pmatrix}bc\\ ac\\ ab\end{pmatrix}$.

Подставим координаты точки A и вектора $\vec{n}$ в уравнение плоскости с нормальным вектором $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Получим

$$bc(x-a)+ac(y-0)+ab(z-0)=0 \text{ или } bc\,x+ac\,y+ab\,z=abc.$$

Каждое слагаемое последнего уравнения разделим на произведение abc и получим уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, что и требовалось доказать.

Задача

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-1,3)$ и отсекающей на координатных осях отрезки, равной длины.

Решение

Уравнение плоскости будем искать в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Из условия $|a|=|b|=|c|$ возможны следующие случаи:

1. $a=b=c$, тогда имеем $x+y+z=a$ и, подставив в это уравнение координаты точки A, найдем a: $1-1+3=a$, или $a=3$; тогда уравнение плоскости запишется $x+y+z=3$.

2. $a=b=-c$, тогда $x+y-z=a$ и для a получим $1-1-3=a$, или $a=-3$; уравнение плоскости примет вид $x+y+z=-3$.

3. $-a=b=c$, $-x+y+z=a$; подставляем в это уравнение координаты точки A: $-1-1+3=a$, или $a=1$; тогда уравнение плоскости $-x+y+z=1$.

4. $a=-b=c$, $x-y+z=a$, $1+1+3=a$, или $a=5$; тогда уравнение плоскости запишется в виде $x-y+z=5$.

Ответ: $x+y+z-3=0$, или $x+y-z+3=0$, или $-x+y+z-1=0$, или $x-y+z-5=0$.

1.5. Исследование общего уравнения плоскости.

Определение

Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B и C - координаты нормального вектора $\vec{n}$, называется *общим уравнением плоскости.*

Рассмотрим различные случаи расположения плоскости в зависимости от коэффициентов в ее общем уравнении.

1 $A=0$; из этого следует, что скалярное произведение $\left(\vec{n},\vec{i}\right)=0$, то есть вектор $\vec{n}$ перпендикулярен оси Ox, а плоскость параллельна оси Ox.

2. $B=0$; $\left(\vec{n},\vec{j}\right)=0$, то есть вектор $\vec{n}$ перпендикулярен оси Oy, а плоскость параллельна оси Oy.

3. $C=0$; $\left(\vec{n},\vec{k}\right)=0$, то есть вектор $\vec{n}$ перпендикулярен оси Oz, а плоскость параллельна оси Oz.

4. $D=0$; в этом случае уравнение плоскости имеет решение $x=y=z=0$, или точка $O(0,0,0)$ принадлежит плоскости.

5. $A=0$ и $B=0$; плоскость параллельна координатным осям Ox и Oy, а тогда она параллельна координатной плоскости xOy.

6. $A=0$ и $C=0$; плоскость параллельна координатным осям Ox и Oz, а тогда она параллельна координатной плоскости xOz.

7. $B=0$ и $C=0$; плоскость параллельна координатным осям Oy и Oz, а тогда она параллельна координатной плоскости yOz.

8. $A=0$ и $D=0$; плоскость параллельна координатной оси Ox и проходит через начало координат, то есть проходит через координатную ось Ox.

9. $B=0$ и $D=0$; плоскость параллельна координатной оси Oy и проходит через начало координат, то есть проходит через координатную ось Oy.

10. $C=0$ и $D=0$; плоскость параллельна координатной оси Oz и проходит через начало координат, то есть проходит через координатную ось Oz.

Задача

Напишите уравнения координатных плоскостей.

Решение

В уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ для координатной плоскости xOy $A=B=D=0$, следовательно, ее уравнение имеет вид $Cz=0$, или $z=0$. Аналогично, уравнение координатной плоскости xOz: $By=0$, или $y=0$ и координатной плоскости yOz: $Ax=0$, или $x=0$.

Ответ: $x=0$, $y=0$, $z=0$.

1.6. Линии в пространстве. Общие уравнения прямой

Теорема 1

Если $f_1(x,y,z)=0$ и $f_2(x,y,z)=0$ - уравнения двух поверхностей в прямоугольной декартовой системе координат, то система $\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ задает в пространстве множество точек, принадлежащих как одной поверхности, так и другой, то есть их линии пересечения.

Следовательно, линия в пространстве задается системой двух уравнений с тремя переменными.

Пример 1

Система $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=0 \end{cases}$ задает в пространстве линию пересечения сферы с центром в начале координат и с радиусом 3 и координатной плоскости xOy, то есть окружность с радиусом 3, расположенную в плоскости xOy.

Пример 2

Система $\begin{cases} x=3 \\ z=2 \end{cases}$ задает линию пересечения плоскости, параллельной координатной плоскости yOz, и плоскости, параллельной координатной плоскости xOy. Ясно, что это прямая, параллельная координатной оси Oy (рис.7).

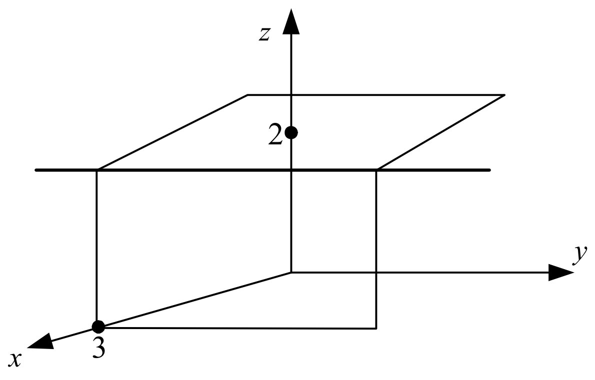

Рис. 7

Поскольку линией пересечения двух плоскостей является прямая, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2

Прямая в пространстве задается системой двух линейных уравнений с тремя переменными.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Эти уравнения называются общими уравнениями прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ

Следует иметь в виду, что при этом между двумя уравнениями системы не должно быть линейной зависимости, то есть ранг матрицы системы должен быть равен 2.

1.7. Параметрические и канонические уравнения прямой. Взаимное расположение прямых

Параметрические уравнения прямой

Прямая линия однозначно определена, если на ней задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор, параллельный этой прямой. В дальнейшем такой вектор будем называть *направляющим вектором*. Если $\vec{s} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ - направляющий вектор, то для любой точки $M(x, y, z)$, принадлежащей прямой справедливо: $\vec{s} \parallel \overrightarrow{M_0M}$. Из определения коллинеарных векторов следует соотношение $\overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$. Так как вектор $\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$, то последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}.$$

Полученные три уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой,* а t - *параметром.*

Канонические уравнения прямой

Если использовать условие коллинеарности векторов, выраженное через их координаты, то получим уравнения, которые называются *каноническими уравнениями прямой:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Задача 1

Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M(-2, -3, 4)$ и $N(2, -3, -1)$.

Решение

Вектор $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ параллелен прямой, следовательно, мы можем выбрать его в качестве направляющего вектора. Подставляя в канонические уравнения прямой координаты любой из заданных точек, например M, получим систему канонических уравнений прямой

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{-5}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Следует заметить, что канонические и параметрические уравнения прямой выглядят различно, в зависимости от того, координаты какой точки в них подставлены вместо чисел x_0, y_0 и z_0. Кроме того, в данной задаче одна из координат направляющего вектора равна нулю, а это означает, что один из знаменателей в канонических уравнениях равен нулю. Такая запись для канонических уравнений прямой считается вполне допустимой. Чтобы понять, как в данном случае расположена в пространстве прямая, перейдем к параметрическим уравнениям. Для этого каждое из трех равных отношений обозначим через t и получим

$\begin{cases} x+2 = 4 \cdot t \\ y+3 = 0 \cdot t \\ z-4 = -5 \cdot t \end{cases}$, или $\begin{cases} x = 4t-2 \\ y = -3 \\ z = -5t+4 \end{cases}$. Из последних уравнений ясно, что заданная прямая лежит в плоскости $y = -3$.

Задача 2

Составьте параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A в треугольнике ABC, если заданы координаты его вершин $A(1,4,-1)$, $B(-2,-2,5)$ и $C(3,1,-2)$.

Решение

На медиане AM задана точка A (рис.8). Направляющим вектором для нее может являться вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (рис. 8). Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, а также вектора $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$. Подставим в параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ вместо m, n, p координаты вектора $\vec{s} = \overrightarrow{AD}$, а вместо x_0, y_0, z_0 - координаты точки A. Получим $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 4-9t \\ z = -1+5t \end{cases}$.

Ответ: $x = 1-t$, $y = 4-9t$, $z = -1+5t$.

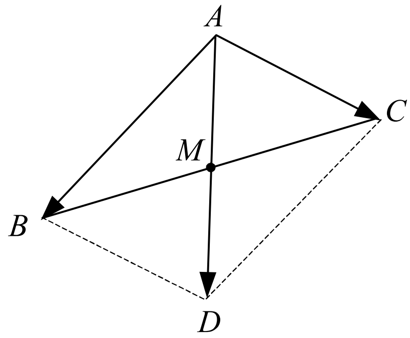

Рис. 8.

Угол между прямыми

Пусть $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ и $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$ - направляющие векторы двух прямых. Угол α между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами. Для косинуса этого угла справедлива формула:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right)}{\left|\vec{s}_1\right| \cdot \left|\vec{s}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых

$$\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = 0 \text{ или } m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \text{ или } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Условия пересечения прямых в пространстве

Если $\overline{s_1} = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ и $\overline{s_2} = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$ - направляющие векторы двух прямых, а $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - точки на этих прямых, то прямые пересекаются или скрещиваются в зависимости от того, компланарны или нет векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1 M_2}$ (рис.9).

Прямые скрещиваются, если смешанное произведение $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0$ (рис.9 a).

Прямые пересекаются, если смешанное произведение $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1 M_2} = 0$ (рис.9 b).

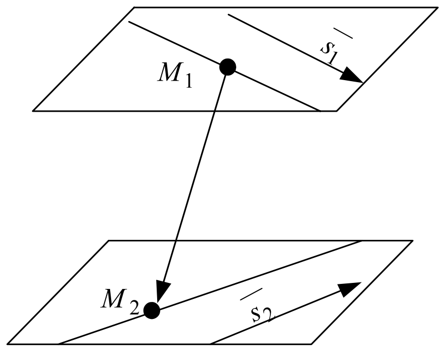

Рис. 9 а.

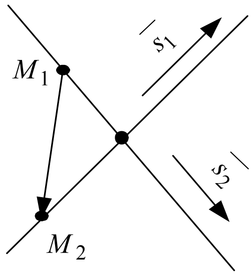

Рис.9.b

Задача 3

При каком значении l прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ пересекаются?

Решение

Для первой прямой: направляющий вектор $\vec{s}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ и точка $M_1(-2,0,1)$. Для второй прямой: направляющий вектор $\vec{s}_2=\begin{pmatrix}l\\4\\2\end{pmatrix}$ и точка $M_2(3,1,7)$. Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{pmatrix}5\\1\\6\end{pmatrix}$ и учтем, что прямые пересекаются, если смешанное произведение векторов $\vec{s}_1,\vec{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ равно нулю.

$$\vec{s}_1\,\vec{s}_2\,\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}2&-3&4\\l&4&2\\5&1&6\end{vmatrix}=48-30+4l-80-4+18l=22l-66.$$

Поскольку $22l-66=0$, то $l=3$.

Ответ: $l=3$.

Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду

Пусть прямая задана общими уравнениями $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.

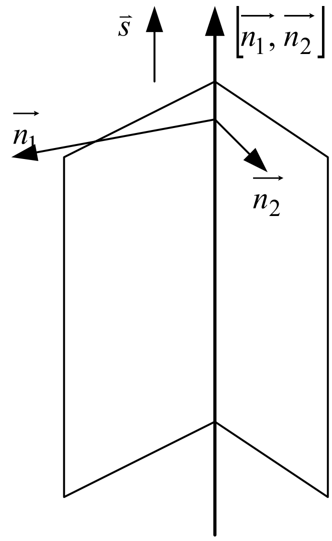

Рис. 10.

Если нужно привести ее уравнения к каноническим или параметрическим, то следует выбрать на этой прямой какую-то точку и найти вектор, параллельный ей. Координатами точки, принадлежащей прямой, является любое из решений заданной линейной системы. Направляющим вектором прямой является вектор $\vec{s} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right]$, где $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ - нормальные векторы плоскостей, задающих прямую (рис. 10).

Задача 4

Приведите уравнения прямой $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ к каноническому виду.

Решение

Выберем на прямой точку с аппликатой $z = 0$. Подставим $z = 0$ в общие уравнения прямой и найдем остальные координаты точки из системы. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$. Складывая уравнения системы, получим $3x = 3$, или $x = 1$. Подставляя это в любое уравнение, найдем $y = 2$, Итак, точка $M_0(1,2,0)$ принадлежит прямой. Нормальные векторы плоскостей, задающих прямую: $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда направляющий вектор прямой равен их векторному произведению

$$\vec{s} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} + 3\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{3}$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{3}$.

1.8. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть прямая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$, а плоскость уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Угол между прямой и плоскостью

Из рисунка 11 ясно, что для угла φ между прямой и плоскостью справедлива формула:

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{\left(\vec{n}, \vec{s}\right)}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

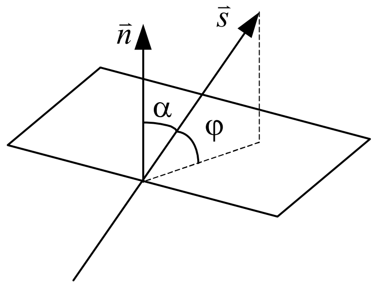

Рис. 11.

Условие параллельности прямой и плоскости.

$$\vec{n} \perp \vec{s}, \text{ или } \left(\vec{n}, \vec{s}\right) = 0, \text{ или } Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости.

$$\vec{n} \parallel \vec{s}, \text{ или } \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Задача 1

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1, 2, -3)$ и перпендикулярной прямой, заданной уравнениями $\frac{x}{-5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-3}$.

Решение

Из рисунка 12 видно, что направляющий вектор прямой $\vec{s} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ перпендикулярен плоскости, и его можно взять в качестве ее нормального вектора.

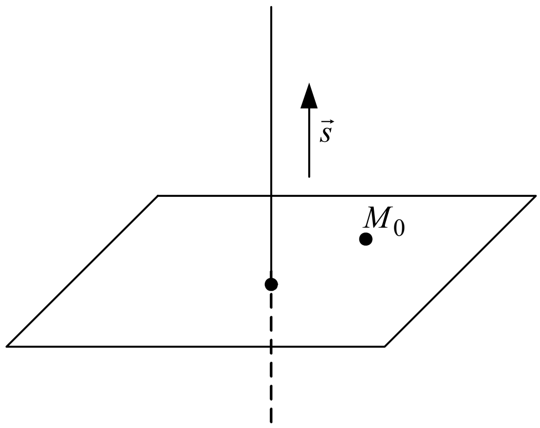

Рис. 12.

Подставляя в уравнение плоскости с нормальным вектором $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ координаты точки M_0 и координаты вектора $\vec{s}$, получим

$$-5(x+1)+2(y-2)-3(z+3)=0,\text{ или } -5x+2y-3z-18=0.$$

Ответ: $-5x+2y-3z-18=0$.

Точка пересечения прямой и плоскости

Точка пересечения прямой и плоскости находится из решения системы $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$, где $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ - параметрические уравнения прямой, $Ax+By+Cz+D=0$ - уравнение плоскости.

Задача 2

Найдите точку, симметричную точке $M_0(-1;-2;2{,}5)$ относительно прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}.$$

Решение

Точка M, симметричная точке M_0 относительно заданной прямой l, лежит на прямой M_0M, перпендикулярной прямой l. При этом точка пересечения прямых O делит отрезок M_0M пополам (рис.13).

Если провести через точку M_0 плоскость α, перпендикулярную прямой l, то прямая M_0M будет лежать в этой плоскости. Для плоскости α нормальным вектором является направляющий вектор прямой l, то есть вектор $\vec{s}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Уравнение плоскости α:

$$1(x+1)+2(y+2)-2(z-2{,}5)=0,\ x+2y-2z+10=0.$$

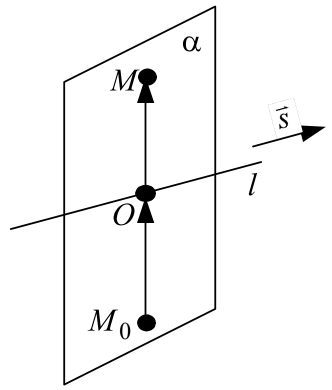

Рис. 13.

Запишем уравнения прямой l в параметрическом виде $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$. Точка O - точка пересечения прямой l и плоскости α. Ее координаты найдем из системы $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2t \\ z = -2 - 2t \\ x + 2y - 2z + 10 = 0 \end{cases}$.

Подставляя x, y и z из первых трех уравнений в четвертое, получим $4 + t + 4t - 2(-2 - 2t) + 10 = 0$, или $9t + 18 = 0$, откуда $t = -2$.

Координаты точки O можно найти, подставляя это значение t в первые три уравнения системы, тогда точка $O(2, -4, 2)$. Определим координаты вектора $\overrightarrow{M_0O} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ -4+2 \\ 2-2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = 2 \cdot \overrightarrow{M_0O}$, поэтому $\overrightarrow{M_0M} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Координаты точки M найдем, прибавляя к координатам точки M_0 координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$. Получим $M(5; -6; 1{,}5)$.

Ответ: $M(5; -6; 1{,}5)$.

2. Аналитическая геометрия на плоскости

2.1. Геометрическое изображение векторов из пространства R^2. Прямоугольная декартова система координат на плоскости

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат x, y с началом в некоторой точке O. Произвольную точку M в этой системе координат будем задавать ее координатами $M(x, y)$. Вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ из пространства R^2 будем представлять в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ где x, y - его координаты в стандартном ортонормированном базисе $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и изображать направленным отрезком $\overrightarrow{OM}$, начало которого может быть перенесено в любую точку плоскости (рис.14).

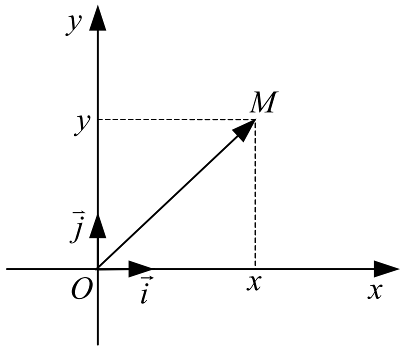

Рис.14.

Расстояние r между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M_0}{M_0M_2}$ отыскиваются по формулам:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}.$$

2.2. Линии на плоскости. Прямая на плоскости

Определение

Алгебраическое уравнение $f(x, y) = 0$ является уравнением линии Φ на плоскости, если:

1. Для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in \Phi \Rightarrow f(x_0, y_0) = 0$.
2. Для любого решения x_0, y_0 уравнения $f(x, y) = 0$ точка $M_0(x_0, y_0) \in \Phi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Из определения следует, что линия на плоскости задается алгебраическим уравнением, связывающим координаты тех и только тех точек, которые принадлежат этой линии.

Теорема

Линейное уравнение с двумя переменными $Ax + By + C = 0$ задает на плоскости прямую.

Доказательство

Линейное уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечно много решений. Пусть x_0, y_0 и x_1, y_1 любые два решения этого уравнения. Из определения уравнения линии следует, что точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ принадлежат данной линии, то есть, справедливы равенства

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \text{ и}$$

$$A x_1 + B y_1 + C = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$A\left(x_1 - x_0\right) + B\left(y_1 - y_0\right) = 0.$$

Если рассмотреть векторы $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ и $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, то последнее уравнение эквивалентно векторному уравнению $\left(\vec{r}, \vec{n}\right) = 0$. Это означает, что любой вектор с началом и концом на данной линии ортогонален вектору $\vec{n}$. Ясно, что такому условию удовлетворяют только точки, лежащие на прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Из доказательства теоремы следует геометрический смысл коэффициентов A и B. Это координаты перпендикулярного ей вектора $\vec{n}$.

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором*, а уравнение $A x + B y + C = 0$ - *общим уравнением прямой.*

В зависимости от задания прямой, такое уравнение может быть записано в различных видах.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

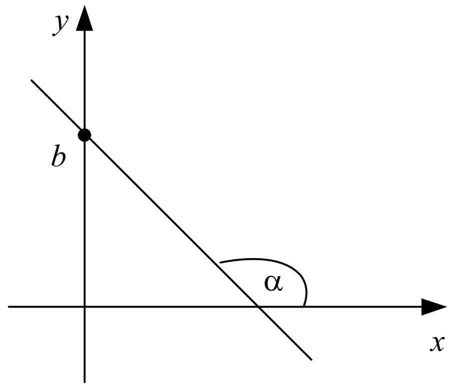

Рис. 15

Уравнение $y = kx + b$, где угловой коэффициент $k = \mathrm{tg}\,\alpha$, α - угол между прямой и осью Ox, b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy (рис.15), называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение прямой с нормальным вектором

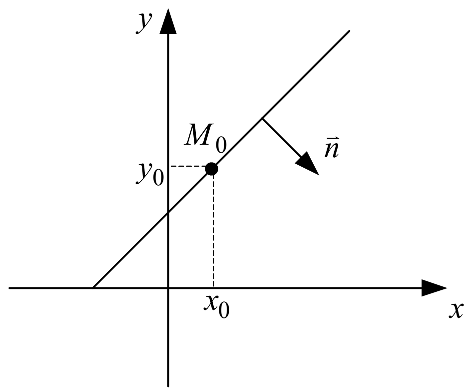

Рис. 16

Уравнение $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$, где $M_0\left(x_0,y_0\right)$ - точка, принадлежащая прямой (рис.16), $\vec{n}=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ - *нормальный вектор прямой* (любой вектор, перпендикулярный данной прямой), называется *уравнением прямой с нормальным вектором*.

Каноническое уравнение прямой

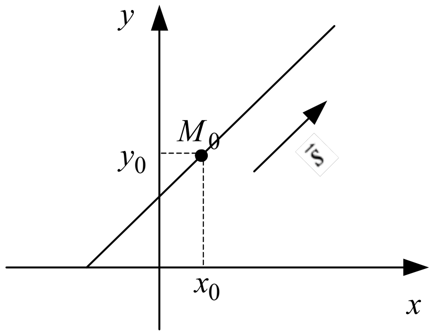

Рис. 17.

Уравнение $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$, где $M_0\left(x_0,y_0\right)$ - точка, принадлежащая прямой (рис.17), $\vec{s}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ - *направляющий вектор прямой* (любой вектор, параллельный прямой), называется *каноническим уравнением прямой.*

Уравнение прямой в «отрезках»

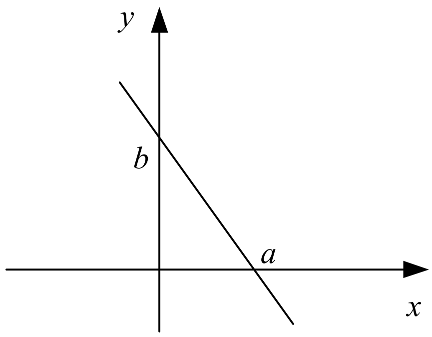

Рис. 18

Уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a - абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox, b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy (рис.18), называется *уравнением прямой в отрезках.*

Угол между прямыми

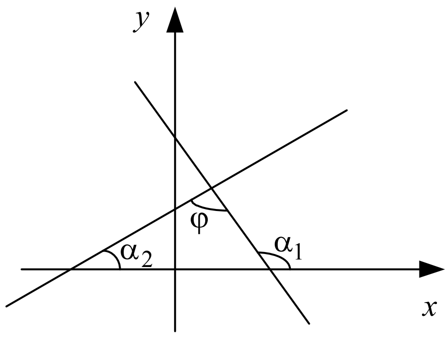

Рис. 19

Если k_1 и k_2 - угловые коэффициенты двух прямых, то угол φ между ними находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

где α_1 и α_2 - углы, которые данные прямые составляют с координатной осью Ox (рис.19).

ЗАМЕЧАНИЕ

Если прямые заданы общими уравнениями $A x_1 + B_1 y + C_1 = 0$

и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то угол между ними можно определять как

угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ и $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$.

Точку пересечения двух прямых, заданных общими уравнениями, $A x_1 + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, находят, решая систему:

$$\begin{cases} A x_1 + B_1 y + C_1 = 0 \\ A x_2 + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Задача 1

Напишите уравнения высоты из вершины A и медианы из вершины B в треугольнике ABC, если заданы его вершины $A(-1,-5)$, $B(3,-1)$ и $C(1,-2)$.

Решение

Для высоты AK используем уравнение прямой с нормальным вектором, где в качестве нормального вектора $\vec{n}$ возьмем вектор $\overrightarrow{BC}$. Для медианы BM используем каноническое уравнение прямой, где в качестве направляющего вектора $\vec{s}$ возьмем вектор $\overrightarrow{BM}$ (рис.20).

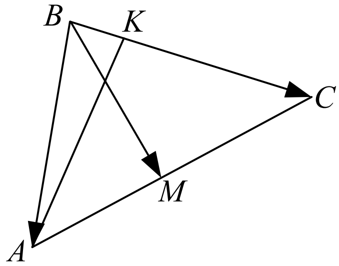

Рис. 20.

Нормальный вектор для высоты AK - вектор $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$. В уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ подставим вместо A и B координаты вектора $\overrightarrow{BC}$, а вместо x_0 и y_0 - координаты точки A. Получим $-2(x+1)-(y+5)=0$, или, раскрывая скобки, $-2x-y-7=0$, или $2x+y+7=0$.

Направляющий вектор для медианы BM - вектор $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$. Так как $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$, то $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2-4\\-1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2{,}5\end{pmatrix}$. Уравнение медианы можно получить, подставив в каноническое уравнение $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ вместо m и n координаты вектора $\overrightarrow{BM}$, а вместо x_0 и y_0 - координаты точки B. Получим $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+1}{-2{,}5}$, или $-2{,}5x+7{,}5=-3y-3$, или $-2{,}5x+3y+10{,}5=0$.

Ответ: Уравнение высоты AK: $2x+y+7=0$. Уравнение медианы BM: $-2{,}5x+3y+10{,}5=0$.

Задача 2

Написать уравнение сторон квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1,-1)$ и $B(-2,3)$.

Решение

Уравнение стороны AB, запишем, используя каноническое уравнение прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ и выбирая в качестве направляющего вектора $\vec{s}=\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$ вектор $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Подставляя в уравнение координаты точки A вместо чисел x_0 и y_0, получим $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{4}$, или $4x-4=-3y-3$, или $4x+3y-1=0$.

Уравнения сторон AD и BC получим, используя уравнение прямой с нормальным вектором $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, где нормальным вектором является тот же вектор $\overrightarrow{AB}$.

Для стороны AD подставляем в это уравнение вместо x_0 и y_0 координаты точки A: $-3(x-1)+4(y+1)=0$, или $3x-4y-7=0$.

Для стороны BC подставляем координаты точки B: $-3(x+2)+4(y-3)=0$, или $3x-4y+18=0$.

Каждый из векторов $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ортогонален $\overrightarrow{AB}$, что легко проверить, вычислив их скалярные произведения. На рисунке 21 вектор $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, так как он составляет с координатными осями острые углы.

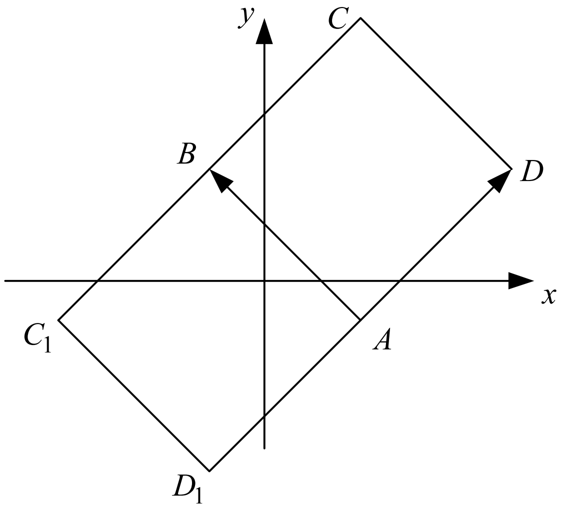

Рис. 21.

Теперь можно найти координаты точки D, прибавляя к координатам точки A координаты вектора $\overrightarrow{AD}$:

$$x_D = 1 + 4 = 5, \quad y_D = -1 + 3 = 2,$$

следовательно, $D(5, 2)$.

Для стороны CD можно использовать уравнение прямой с нормальным вектором, поскольку известны принадлежащая ей точка $D(5,2)$ и нормальный вектор $\overrightarrow{AD}$. Подставляя их в это уравнение, получим $4(x-5)+3(y-2)=0$ и, раскрывая скобки, $4x+3y-26=0$.

Теперь можно использовать второй, ортогональный к вектору $\overrightarrow{AB}$, вектор $\overrightarrow{AD_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Прибавляя его координаты к координатам точки A, найдем координаты точки D_1, симметричной точке D относительно стороны AB. Легко проверить, что координаты точки $D_1(-3,-4)$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяет и квадрат ABC_1D_1, симметричный квадрату $ABCD$ относительно стороны AB. Уравнение стороны CD_1 имеет вид $4(x+3)+3(y+4)=0$, или $4x+3y+24=0$.

Ответ: $4x+3y-1=0$, $3x-4y-7=0$, $3x-4y+18=0$, $4x+3y-26=0$ или $4x+3y+24=0$.

Задача 3

Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8,6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12 квадратных единиц.

Решение

Для уравнения искомой прямой следует использовать уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Так как точка $P(8,6)$ принадлежит этой прямой, то, подставляя ее координаты, получим $\frac{8}{a}+\frac{6}{b}=1$, или $8b+6a=ab$.

Из условий задачи площадь треугольника, которая вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}|a||b|$, равна 12 (рис.22). Тогда $|a||b|=24$ и необходимо рассмотреть два случая: $ab=24$ и $ab=-24$.

1. $ab=24$, $b=\frac{24}{a}\Rightarrow\ 8\frac{24}{a}+6a=24$.

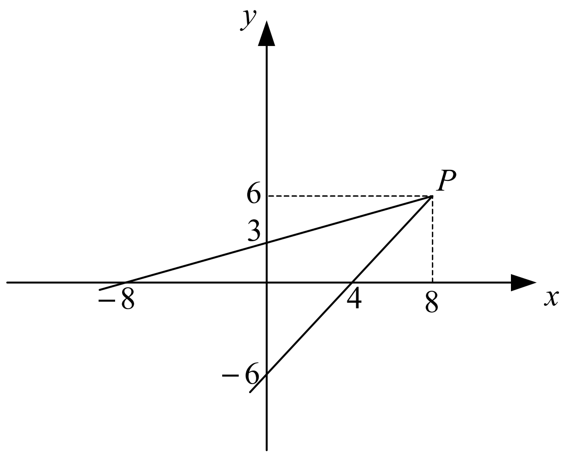

Рис. 22.

Сокращая последнее равенство на 6, и умножая его на a, получим квадратное уравнение $a^2-4a+32=0$, которое не имеет вещественных корней, так как его дискриминант отрицателен.

2. $ab=-24$, $b=-\frac{24}{a}\Rightarrow\ 8\frac{-24}{a}+6a=-24\Rightarrow\ a^2+4a-32=0$.

Решения этого уравнения $a_1=-8$ и $a_2=4$. Поскольку $ab=-24$, то $b_1=3$ и $b_2=-6$. Подставляя эти значения a и b в уравнение прямой в отрезках, получим

$$\frac{x}{-8}+\frac{y}{3}=1\text{, или } 3x-8y+24=0.$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1\text{, или } 3x-2y-12=0.$$

Ответ: $3x-8y+24=0$, $3x-2y-12=0$.

2.3. Кривые второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy, то кривая второго порядка определяется уравнением второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1),$$

где A,B,C,D,E,F — заданные действительные числа. При этом числа A,B,C одновременно не равны нулю. Уравнение (1) называется *общим уравнением кривой* *второго порядка*. Если нет точек (x, y) с действительными координатами, удовлетворяющих уравнению (1), то говорят, что уравнение (1) определяет мнимую кривую второго порядка. Уравнение $x^2 + y^2 = -1$ может служить примером уравнения второй степени, определяющего мнимую кривую, в данном случае мнимую окружность.

Важные случаи общего уравнения кривой второго порядка

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a \geq b > 0)$$

с полуосями длины a и b. В частности, при $a = b$ уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

с центром в начале координат и радиусом a.

Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a \geq b > 0)$$

с полуосями a и b.

Уравнение параболы

$$y^2 = 2px \ (p > 0).$$

Уравнение пары пересекающихся прямых

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0, \ (0 < a, b) \text{ или } y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Уравнение пары параллельных или совпадающих прямых

$$x^2 - a^2 = 0 \ (a \geq 0), \text{ или } x = \pm a.$$

$$y^2 - b^2 = 0, \ (b \geq 0) \text{ или } y = \pm b.$$

Уравнение, определяющее точку

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ или } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Эллипс

Эллипсом называется множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Теорема

Если известны: расстояние между фокусами F_1 и F_2 эллипса, равное $2c$ и сумма расстояний от любой точки на эллипсе до фокусов, равное $2a$, то в прямоугольной декартовой системе координат, где ось Ox проходит через фокусы F_1 и F_2 (от F_1 к F_2), а начало координат посередине между ними, уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b^2 = a^2 - c^2.$$

Доказательство

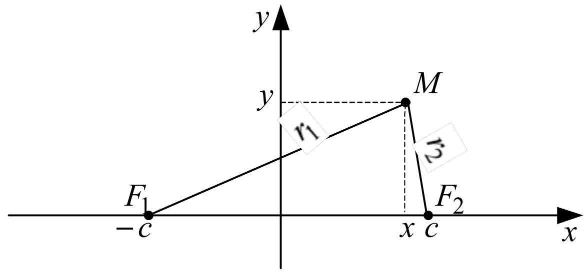

Рис. 23.

Во введенной системе координат фокусы расположены на оси Ox и имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу (рис.23). Тогда

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,\ MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,$$

$$2a=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,$$

перенося первый радикал из правой части в левую, запишем

$$2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=(x-c)^2+y^2$$

и раскроем квадраты в левой и правой частях

$$4a^2+x^2+2cx+y^2+c^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=x^2-2xc+c^2+y^2.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение

$$4a^2+4cx=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,$$

обе части которого разделим на 4 и снова возведем в квадрат. тогда уравнение примет вид

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[x^2+2cx+c^2+y^2\right].$$

Последнее уравнение можно упростить, если раскрыть скобки и привести подобные члены,

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

$$-\left(a^2-c^2\right)x^2=-a^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2.$$

Поскольку из определения эллипса следует, что $2a>2c$, то число $a^2-c^2>0$ и его можно обозначить, как $b^2=a^2-c^2$. Тогда уравнение эллипса запишется в виде

$$-b^2x^2=-a^2b^2+a^2y^2,\ \text{или}\ a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2.$$

Разделив последнее уравнение на a^2b^2, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Такое уравнение эллипса называется *каноническим.*

Исследование формы кривой

Если в уравнении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ заменить x на $-x$, то его вид не изменится. Это означает, что если точка $M(x,y)$ принадлежит кривой, то точка $M_1(-x,y)$ также принадлежит этой кривой. Следовательно, кривая симметрична относительно оси ординат. Эллипс симметричен и относительно оси абсцисс, потому что его уравнение не меняется при замене y на $-y$. Учитывая это, достаточно изучить вид кривой в первой четверти, то есть при условии $x,y\geq 0$.

При $x,y\geq 0$ можно задать кривую в виде явного уравнения $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $(0\leq x\leq a)$. Из этого уравнения ясно, что кривая проходит через точки $B(0,b)$ и $A(a,0)$. Эти точки называются *вершинами эллипса.*

Эллипс — ограниченная кривая, которая находится внутри прямоугольника $\begin{cases}0\leq x\leq a\\0\leq y\leq b\end{cases}$. Из явного уравнения эллипса ясно, что ордината y при непрерывном возрастании x на отрезке $[0,a]$ монотонно убывает. Следовательно, эллипс есть непрерывная замкнутая кривая, в первой четверти она выпукла вверх, в любой ее точке можно провести касательную. В остальных четвертях кривая строится с учетом симметрии относительно координатных осей.

Числа a и b называются *полуосями* эллипса*.* Поскольку $b^2=a^2-c^2$, то $a>b$ и эллипс вытянут вдоль оси Ox. При этом a называется *большей полуосью*, а b - *меньшей полуосью* эллипса. Вид кривой показан на рисунке 24.

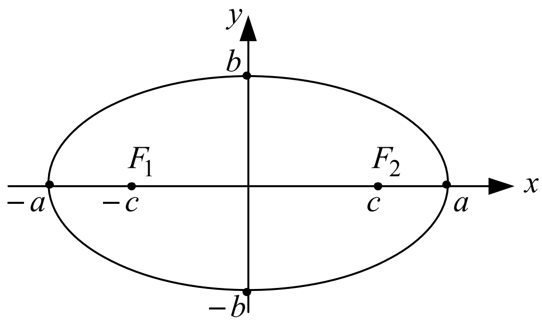

Рис. 24.

При $a=b$ эллипс представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Уравнение этой окружности

$$x^2+y^2=a^2.$$

Эксцентриситетом эллипса называется число $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Для эксцентриситета эллипса справедливо неравенство $0<\varepsilon<1$, поскольку из определения эллипса следует, что $c>a>0$. Эксцентриситет окружности $\varepsilon=0$, поскольку для окружности $a=b$ и $c=0$.

Учитывая то, что эксцентриситет окружности $\varepsilon=0$, можно сделать вывод, что чем больше эксцентриситет эллипса, тем больше он вытянут относительно одной из осей симметрии.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Теорема

Если известны: расстояние между фокусами F_1 и F_2 гиперболы, равное $2c$ и разность расстояний от любой ее точки до фокусов, равное $2a$, то в прямоугольной декартовой системе координат, где ось Ox проходит через фокусы F_1 и F_2 (от F_1 к F_2), а начало координат посередине между фокусами, уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a,b>0$ и $b^2=c^2-a^2$.

Доказательство

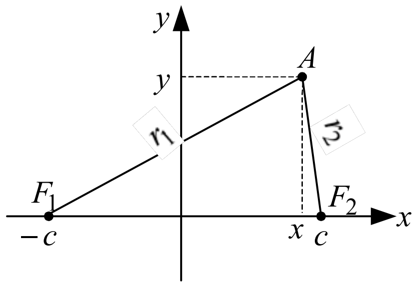

Рис. 25.

Во введенной системе xOy координаты фокусов равны $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Если точка $A(x,y)$ принадлежит гиперболе, то справедливо $|AF_1-AF_2|=2a$, или $AF_1-AF_2=\pm 2a$ (рис.25).

Подставив в последнее равенство координаты точек A, F_1, F_2, получим

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

или $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

и упростим его, раскрыв все квадраты

$$x^2+2cx+c^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

и приведя подобные члены

$$4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Последнее уравнение разделим на 4 и снова возведем в квадрат

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right).$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получим уравнение

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right),$$

в котором $c^2-a^2>0$, поскольку $2c>2a$ из определения гиперболы. Из этого следует, что можно ввести обозначение $b^2=c^2-a^2$ и записать уравнение гиперболы в виде $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Разделив на a^2b^2, получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое называется *каноническим.*

Исследование формы кривой.

Из вида уравнения ясно, что гипербола симметрична относительно оси Ox и оси Oy. При $x=0$ получим уравнение $-\frac{y^2}{b^2}=1$, которое не имеет вещественных корней. Следовательно, кривая не пересекает ось Oy. При $y=0$ получим уравнение $\frac{x^2}{a^2}=1$, корни которого $x=\pm a$. Следовательно, кривая пересекает ось Ox в точках $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$. Эти точки называются *вершинами гиперболы.*

Числа a и b называются *полуосями гиперболы,* a - *действительной* полуосью, а b - *мнимой* полуосью.

Для части гиперболы, находящейся в первой четверти, явное уравнение имеет вид

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ ,\ (a\le x<\infty),$$

из которого видно, что y принимает вещественные значения при $|x|\ge a$. Следовательно, нет точек кривой, расположенных в полосе $|x|\le a$. Кроме того, из явного уравнения можно видеть, что при возрастании x на полуинтервале $[a,+\infty)$ ордината y возрастает и стремится к бесконечности.

Определение

Прямая $y=kx+b$ является асимптотой кривой, заданной уравнением $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0 \text{ или } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0\,.$$

Теорема

Прямые $y==\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Доказательство

Для части гиперболы в первой четверти, определяемой равенством $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ и прямой $y=\frac{b}{a}x$:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\tfrac{bx}{a}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{b}{a}\frac{x^2-x^2-a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{b}{a}\frac{-a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]=0\,.$$

Это означает, что прямая $y=\frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы при $x\to+\infty$. В силу симметрии гиперболы относительно осей, так же как и симметрии пары прямых $y=\pm\frac{b}{a}x$ относительно осей, можно сказать, что обе эти прямые являются асимптотами как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$. Вид кривой показан на рисунке 26.

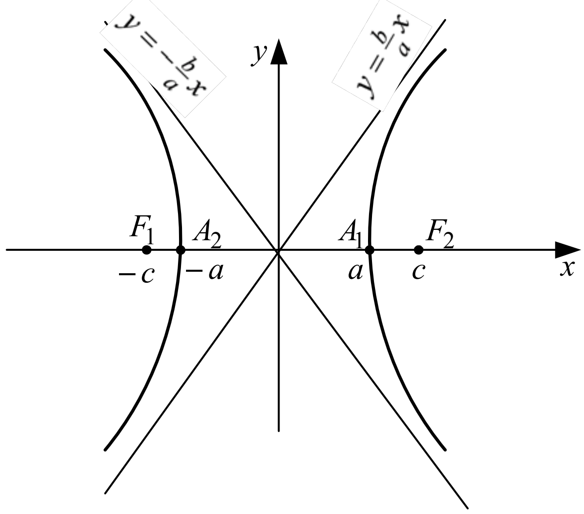

Рис. 26.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где a - действительная полуось. Так как у гиперболы $c>a$, то ее эксцентриситет $\varepsilon>1$.

Зависимость формы гиперболы от величины эксцентриситета можно выяснить, если зафиксировать значение a и увеличивать значение параметра c. При этом будут увеличиваться величина эксцентриситета ε и значение параметра b, так как $b^2=c^2-a^2$. но тогда будет расти и абсолютная величина $\frac{b}{a}$ углового коэффициента асимптот гиперболы. Следовательно, при увеличении эксцентриситета увеличивается размах ветвей гиперболы.

Парабола

Параболой называется множество точек, равноудаленных от некоторой точки, называемой фокусом, и прямой, называемой директрисой.

Теорема

Если точка F - фокус параболы, а прямая l - ее директриса и задано расстояние между ними, равное p, то в системе координат, где ось Ox проходит через F перпендикулярно l и направлена от фокуса к директрисе, а начало координат выбрано посередине между ними, уравнение параболы имеет вид

$$y^2=2px,\ (p>0)$$

Доказательство

Во введенной системе координат координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и уравнение директрисы $l:\ x=-\frac{p}{2}$ (рис. 27). Если точка $A(x,y)$ лежит на параболе, то справедливо

$$AF=AB\text{, или }AF^2=AB^2,$$

где $B\left(-\frac{p}{2},y\right)$ - точка пересечения перпендикуляра, проведенного из A на директрису l.

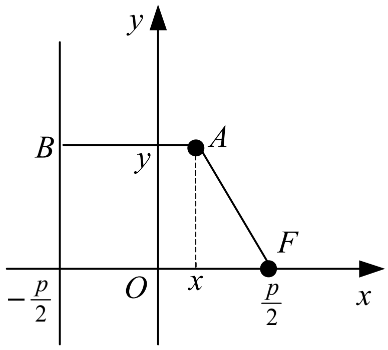

Рис. 27

Поскольку

$$AF^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \text{ и } A\mathrm{B}^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \text{ то } \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

что равносильно

$$x^2 - px + \tfrac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \tfrac{p^2}{4}, \text{ или } -px + y^2 = px,$$

откуда следует уравнение параболы

$$y^2 = 2px,$$

которое называется *каноническим.*

Исследование формы кривой

Из уравнения параболы видно, что кривая симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат. Для ее ветви в верхней полуплоскости, при $y \geq 0$, явно решенное относительно y уравнение имеет вид

$$y = \sqrt{2px} \quad (0 \leq x \leq \infty),$$

из которого видно, что когда x возрастает на полуинтервале $[0,+\infty)$, ордината y возрастает от 0 до $+\infty$.

При $y \leq 0$ ветвь гиперболы симметрична относительно оси Ox. Парабола не имеет асимптот. Эксцентриситет параболы равен 1 и не влияет на форму кривой. Вид кривой показан на рисунке 28.

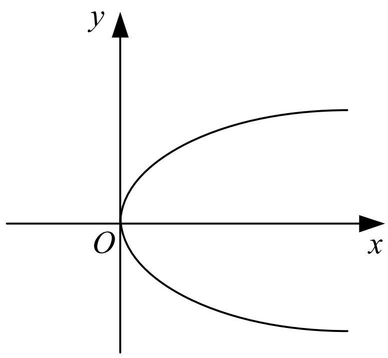

Рис. 28

Задача 4

Построить кривую, заданную уравнением $y^2 - x^2 = 4$.

Решение

Разделив каждое слагаемое заданного уравнения на 4, запишем его в виде $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$. Это уравнение задает на плоскости гиперболу с полуосями $a=b=2$. Гипербола с равными полуосями называется *равнобочной,* ее асимптотами являются биссектрисы координатных углов $y=\pm x$.

При $y=0$ получим уравнение $-\frac{x^2}{4}=1$, не имеющее вещественных корней, то есть гипербола не пересекает ось Ox. При $x=0$, получим уравнение $\frac{y^2}{4}=1$, имеющее корни $y=\pm 2$. Следовательно, вершины гиперболы $B(0,-2)$, $C(0,2)$ лежат на оси Oy.

Фокусы гиперболы расположены на той же оси, на которой находятся ее вершины. Из того, что $c^2=a^2+b^2=8$ и $c=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, следует, что координаты фокусов $F_1\left(0,-2\sqrt{2}\right)$, $F_2\left(0,2\sqrt{2}\right)$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. Вид кривой показан на рисунке 29.

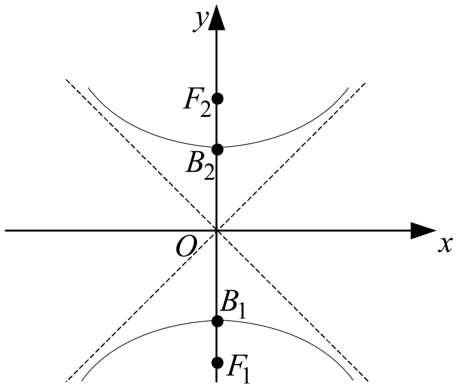

Рис. 29

Преобразование координат на плоскости. Построение кривых заданных общим уравнением

Если сравнить канонические уравнения эллипса, окружности, гиперболы и параболы с общим уравнением кривой второго порядка (1), то видно, что в них коэффициенты $B=D=F=0$. Если в этом уравнении $D\neq 0$, $F\neq 0$ или $B\neq 0$, то чтобы привести уравнение к каноническому виду, определить тип кривой и построить ее, необходимо сделать преобразование координат.

Если в уравнении (1) $D\neq 0$ или $F\neq 0$, то это означает, что центр симметрии эллипса или гиперболы, или центр окружности, или вершина параболы находятся не в начале координат, а в некоторой точке $O'\left(x_0, y_0\right)$. Строить кривую в данном случае удобно, перенося начало координат в эту точку, то есть, сделав замену $\begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \end{cases}$.

При такой замене в новой системе координат с началом в точке O' и с осями $O'x'$ и $O'y'$ уравнение кривой будет иметь канонический вид.

Уравнение эллипса с центром симметрии в точке $O'(x_0, y_0)$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Уравнение гиперболы с центром симметрии в точке $O'(x_0, y_0)$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

вершины в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$.

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

вершины в точках $(0, b)$ и $(0, -b)$.

Уравнение параболы с вершиной в точке $O'(x_0, y_0)$

$$(y-y_0)^2 = \pm 2p\,(x-x_0),$$

ось симметрии параллельна Ox.

$$(x-x_0)^2 = \pm 2p\,(y-y_0),$$

ось симметрии параллельна Oy.

Знак $\pm$ показывает направление ветвей параболы. Если в уравнении знак +, то направление ветвей совпадает с направлением оси, которой параллельна ось симметрии параболы. Если в уравнении знак —, то направление ветвей противоположно направлению оси, которой параллельна ось симметрии параболы.

Задача

Построить кривую, заданную уравнением $x^2+2x+6y-2=0$, приведя его к каноническому виду.

Решение

Преобразуем уравнение следующим образом

$$\left(x^2+2x\right)=-6y+2,\ \left(x^2+2x+1\right)=-6y+2+1,$$

$$(x+1)^2=-6y+3,\ (x+1)^2=-6(\,y-0{,}5).$$

Получили уравнение параболы с вершиной в точке $O'(-1\,;0{,}5)$ и с осью симметрии, параллельной оси Oy. Перенося начало координат в точку O', получим в системе координат $x'O'y'$ уравнение

$$(x')^2=-6\,(y'),$$

где параметр p определяется из условия $2p=6$ или $p=3$.

Парабола симметрична относительно оси $O'y'$ или относительно прямой $x=-1$. Фокус параболы находится на ее оси и отстоит от вершины на $\frac{p}{2}$. Поскольку из уравнения следует, что $y'\le 0$, то ветви параболы направлены вниз и фокус F лежит на $\frac{p}{2}=1{,}5$ ниже вершины, то есть его координаты $F\,(-1\,;-1)$.

Директрисой параболы является прямая, перпендикулярная ее оси и находящаяся на расстоянии $\frac{p}{2}=1{,}5$ от вершины, причем фокус и директриса расположены по разные стороны от вершины. Учитывая все это, можно записать уравнение директрисы $y = 0{,}5 + 1{,}5$, или $y = 2$. Кривая построена на рис. 30.

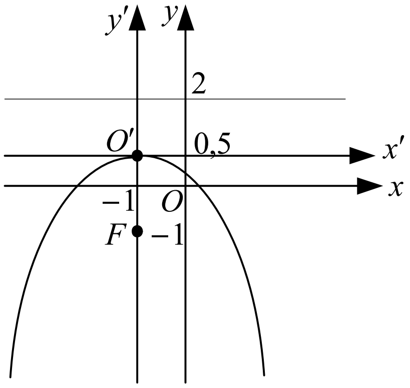

Рис. 30

2.4. Кривые в полярной системе координат

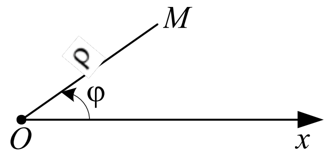

Рис. 31

Полярная система координат задана, если задана точка O, называемая полюсом, и исходящий из полюса луч Ox, который называется полярной осью. Положение любой точки M в полярной системе координат однозначно определяется ее полярными координатами: полярным радиусом ρ - расстоянием от полюса O до точки M и полярным углом φ - углом поворота полярной оси до совпадения с вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.31).

В полюсе полярный радиус $\rho = 0$, а полярный угол не определен. Для всех точек плоскости, не совпадающих с полюсом $\rho > 0$.

Полярный угол измеряется в радианах и считается положительным, если отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Полярный угол определяется с точностью до $2\pi k$, где k - целое число. Это означает, что точки с полярными координатами (ρ, φ) и $(\rho, \varphi + 2\pi k)$ при целом k совпадают.

Если задана полярная система координат, то каждой паре чисел (ρ, φ), из которых $\rho \geq 0$, соответствует точка плоскости, для которой эти числа являются ее полярными координатами. Если $\rho > 0$, то эта точка расположена на луче, составляющим угол φ с полярной осью Ox, и на расстоянии ρ от полюса. Если $\rho = 0$, то эта точка совпадает с полюсом.

Из определения полярных координат следует, что уравнение $\rho = r$ задает на плоскости окружность с центром в полюсе и радиусом r, а уравнение $\varphi = \alpha$ задает на плоскости луч, проходящий через полюс и составляющий с полярной осью угол α, в частности уравнения полярной оси $\varphi = 0$.

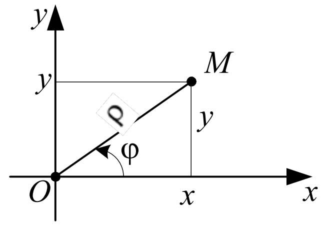

Рис. 32

Если задать на плоскости прямоугольную декартову систему координат, поместив ее начало в полюс и совместив ось абсцисс с полярной осью, то, как легко видеть из рис. 32, декартовы координаты x и y выражаются через полярные координаты из соотношений

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Если каждое уравнение системы возвести в квадрат и сложить их, то получим уравнение $\rho^2 = x^2 + y^2$, из которого по заданным декартовым координатам можно определить полярный радиус.

Задача 1

Построить кривую, заданную в полярных координатах $\rho = \varphi$.

Решение

Кривая, заданная уравнением $\rho = \varphi$, называется *спиралью Архимеда.* Для ее построения зададим значения полярного угла и найдем из уравнения соответствующие значения полярного радиуса.

Таблица 3

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

На лучах $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi = 2\pi$ (последний луч совпадает с полярной осью) отложим соответствующие значения ρ. Из уравнения кривой следует, что если мы будем увеличивать φ, то ρ будет возрастать. Кривая построена на рисунке 33.

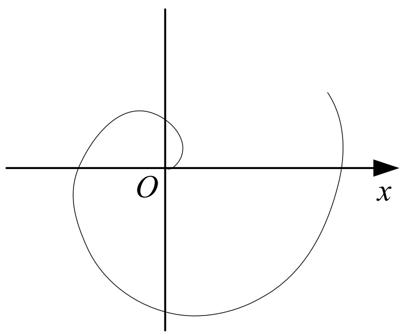

Рис. 33

Задача 2

Построить кривую, заданную в полярной системе координат $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Решение

Поскольку $\cos\varphi$ - периодическая функция и $1 + \cos(\varphi + 2\pi k) = 1 + \cos\varphi$ для любого целого k, то достаточно исследовать функцию при $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Таблица 4

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	2	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Отметим точки (φ, ρ) на плоскости в полярной системе координат и построим соответствующую кривую. Ее вид показан на рисунке 34. Построенная кривая называется *кардиоидой.*

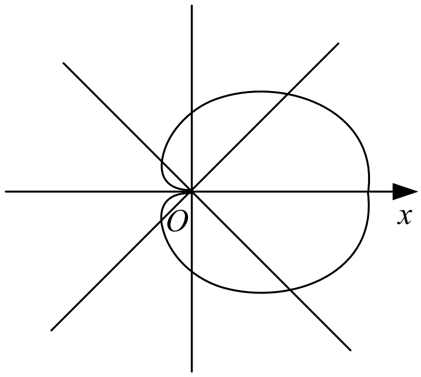

Рис. 34

Задача 3

Построить кривую, заданную уравнением $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2 - y^2$, перейдя к полярным координатам.

Решение

Воспользуемся формулами, связывающими декартовы координаты с полярными координатами

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \text{ и } \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Тогда уравнение заданной кривой можно записать в виде

$$\rho^4 = \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi \text{, или } \rho^4 = \rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right).$$

Сокращая последнее уравнение на ρ^2 и используя формулу $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, получим

$$\rho^2 = \cos 2\varphi \text{, или } \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Поскольку $\cos 2\varphi$ - периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{2} = \pi$, то можно построить кривую на промежутке $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, длина которого равна периоду функции, а затем использовать периодичность.

На промежутке $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, функция определена только при $\cos 2\varphi \ge 0$, что равносильно неравенству $-\frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$, или $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Поэтому найдем несколько точек на кривой при φ из промежутка $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ и нанесем их на плоскость в полярной системе координат.

Таблица 5

φ	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	1	0

Кривая при $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ получится поворотом на угол π, равный периоду функции. Заданная кривая называется *лемнискатой Бернулли*, ее вид показан на рисунке 35.

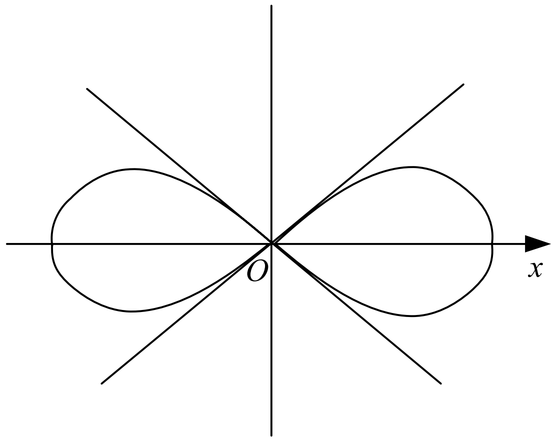

Рис. 35

Задача 4

Построить кривую в полярной системе координат $\rho = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

Заменой $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{4}$ приведем уравнение к виду $\rho = 1 + \cos\varphi'$. В новой системе координат с полярной осью $\varphi' = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{4}$, это уравнение кардиоиды, которая была построена в задаче 2. Вид кривой показан на рисунке 36.

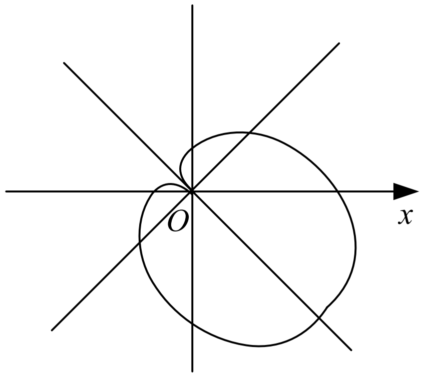

Рис. 36

3. Поверхности второго порядка

Определение

Поверхностью второго порядка называется множество точек, которое задается уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Pz + Q = 0,$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q$ - заданные числа.

В некоторых случаях это уравнение определяет пару различных или совпадающих плоскостей, или одну единственную точку. Такие множества также называются поверхностью.

Если это уравнение определяет пустое множество, то есть, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, то говорят, что оно определяет мнимую поверхность.

Основными частными случаями уравнения поверхности второго порядка являются уравнения следующих поверхностей.

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a,b,c>0).$$

При $a=b=c=0$ эллипсоид обращается в сферу радиуса a с центром в начале координат, т. е. геометрическое место точек, отстоящих от начала координат на расстоянии a. Числа a,b,c называются полуосями эллипсоида. Если в уравнении эллипсоида заменить (одновременно или порознь) x на $-x$, y на $-y$, z на $-z$, то оно не изменится. Это означает, что поверхность симметрична относительно координатных плоскостей: $x=0$, $y=0$, $z=0$ и начала координат. При $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ часть эллипсоида, находящаяся в первом октанте, определяется явным уравнением

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

где $x\ge 0$, $y\ge 0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

Чтобы составить более точное представление об эллипсоиде, произведем сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, пересекая эллипсоид плоскостями $z=h, (-c\le h\le c)$, получим в сечении эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\ \text{или}\ \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

с полуосями $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.

Отсюда видно, что самый большой эллипс получается в сечении эллипсоида плоскостью $z=0$. Аналогичная картина будет при сечении плоскостями $x=h$ $(-a\le h\le a)$ и $y=h, (-b\le h\le b)$.

Точки $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$ и $(0,0,\pm c)$ лежат на эллипсоиде и называются его *вершинами.*

Если какие-либо две полуоси равны между собой, то эллипсоид будет эллипсоидом вращения, т. е. получится от вращения эллипса относительно соответствующей оси координат.

Эллипсоид построен на рисунке 37.

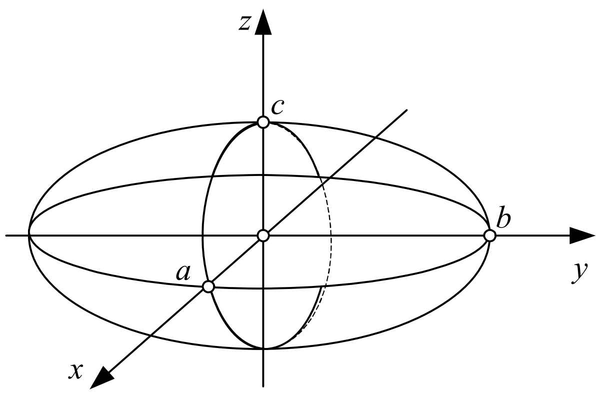

Рис. 37.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \ \ (a,b,c>0).$$

Из уравнения видно, что однополостный гиперболоид является поверхностью, симметричной относительно координатных плоскостей и начала координат. Числа a,b,c называются *полуосями* однополостного гиперболоида. Точки $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$ называются его *вершинами.*

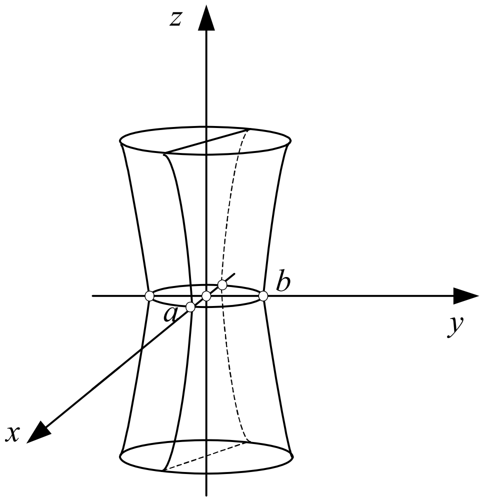

Рис. 38.

В сечении поверхности плоскостью $z=h$ получится эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \text{ или } \frac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

с полуосями $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$.

В сечениях поверхности плоскостями $x=\pm h$ или $y=\pm h$ получатся гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \text{ или } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

Если $|h|\le a$, то действительной осью симметрии первой гиперболы является прямая, параллельная оси Oy, а при $|h|\ge a$ - прямая, параллельная оси Oz.

Аналогично для второй гиперболы. Если $|h|\le b$, то действительной осью симметрии первой гиперболы является прямая, параллельная оси Ox, а при $|h|\ge b$ - прямая, параллельная оси Oz.

Если $a=b$, то в сечении поверхности плоскостями $z=\pm h$ будут окружности радиуса $a\sqrt{1+\left(h^2/c^2\right)}$. Исследуемая поверхность в этом случае образуется от вращения гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ около оси Oz. Общий вид однополостного гиперболоида изображен на рисунке 38.

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ (a,b,c>0).$$

Так как уравнение содержит только квадраты переменных, то данная поверхность симметрична относительно координатных плоскостей $x=0,\ y=0,\ z=0$ и начала координат.

Если записать уравнение поверхности в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z^2}{c^2},$$

то ясно, что, пересекая ее плоскостью $z=\pm h$, где $|h|\geq c$, получим в сечении эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{h^2}{c^2},\ \text{или}\ \frac{x^2}{a^2\left(-1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(-1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1$$

с полуосями $a\sqrt{\left(h^2/c^2\right)-1}$ и $b\sqrt{\left(h^2/c^2\right)-1}$.

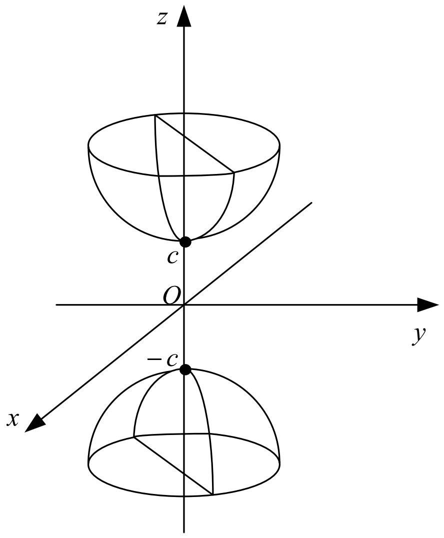

Рис. 39

При $|z|=c$ в сечении получаются две точки $(0,0,\pm c)$. При $|h|<c$ число $\left(h^2/c^2\right)-1<0$, и поэтому нет точек пересечения поверхности и плоскости $z=\pm h$.

При сечении поверхности плоскостями $x=\pm h$ $(y=\pm h)$ получим гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{h^2}{a^2}\ \text{и}\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{h^2}{b^2}.$$

с вершинами на оси Oz.

Двуполостный гиперболоид построен на рисунке 39.

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z,\ (p,q>0).$$

Так как в уравнении присутствуют квадрата переменных x и y, то данная поверхность симметрична, относительна координатных плоскостей $x=0$, $y=0$. Поверхность расположена в полупространстве $z \geq 0$.

Пересекая поверхность плоскостями $z=h$ $(h \geq 0)$, в сечении будут получаться эллипсы

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2h \text{ или } \frac{x^2}{2h\,p^2}+\frac{y^2}{2h\,q^2}=1$$

с полуосями $p\sqrt{2h}$ и $q\sqrt{2h}$, ($p,q>0$).

Пересекая поверхность плоскостями $x=\pm h$ (или $y=\pm h$), получим в сечении параболы

$$y^2=2q^2\left(z-\frac{h^2}{2p^2}\right), \left(x^2=2p^2\left(z-\frac{h^2}{2q^2}\right)\right).$$

со смещенной вершиной в точке $z=\dfrac{h^2}{2p^2}$ $\left(z=\dfrac{h^2}{2q^2}\right)$.

При $p=q$ поверхность будет поверхностью вращения, получающейся от вращения параболы $x^2=2p^2z$ вокруг оси Oz. В этом случае поверхность называют *параболоидом вращения.*

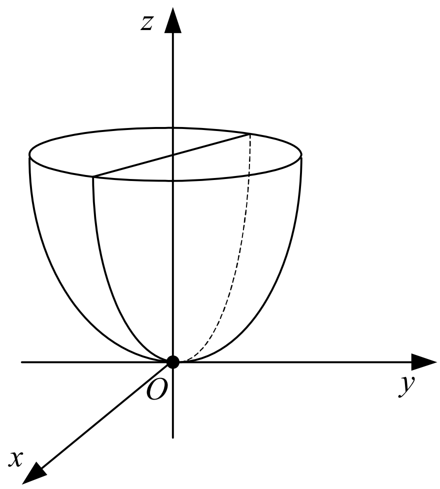

Рис. 40.

Точка $(0,0,0)$ лежит на поверхности и называется *вершиной* эллиптического параболоида. Эллиптический параболоид изображен на рисунке 40.

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z,\ (p,q>0).$$

По виду уравнения ясно, что данная поверхность симметрична относительно плоскостей $x=0$, $y=0$. Пересекая поверхность плоскостями $z=h$, мы будем получать в сечении гиперболы

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2h$$

причем, при $h>0$ действительная ось симметрии гиперболы будет параллельной оси Ox, а при $h<0$ — оси Oy. При $h=0$ в сечении будут две пересекающиеся прямые.

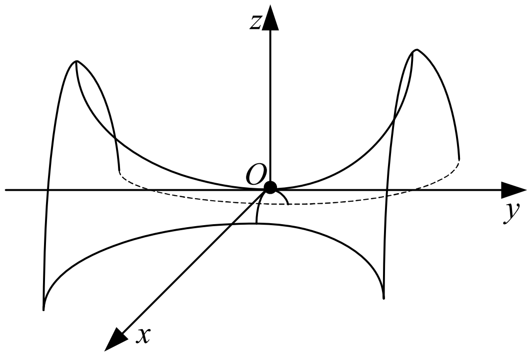

Рис. 41

При сечении поверхности плоскостями $x=h$ или $y=h$, получим параболы, с ветвями, направленными вниз или вверх:

$$-\frac{y^2}{q^2}=2z-\frac{h^2}{p},\ \frac{x^2}{p^2}=2z+\frac{h^2}{q}.$$

Поверхность изображена на рисунке 41.

Конус второго порядка.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\ \ (a,b,c>0).$$

Из уравнения ясно, что поверхность симметрична относительно координатных осей. При сечении поверхности плоскостями $z=\pm h$ получаются эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}\ \text{ или }\ \frac{x^2}{a^2\frac{h^2}{c^2}}+\frac{y^2}{b^2\frac{h^2}{c^2}}=1$$

с полуосями $\frac{ah}{c}$ и $\frac{bh}{c}$.

Если же пересекать поверхность плоскостями $x=\pm h$ или $y=\pm h$, то в сечении получим гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}\ \left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}\right).$$

Если ее пересекать плоскостями $y=\pm hx$, то в сечении получим пару пересекающихся прямых

$$z=\pm cx\sqrt{\left(1/a^2\right)+\left(h^2/b^2\right)}.$$

Уравнению удовлетворяет точка $(0,0,0)$, следовательно, поверхность проходит через начало координат. Вид поверхности показан на рисунке 42.

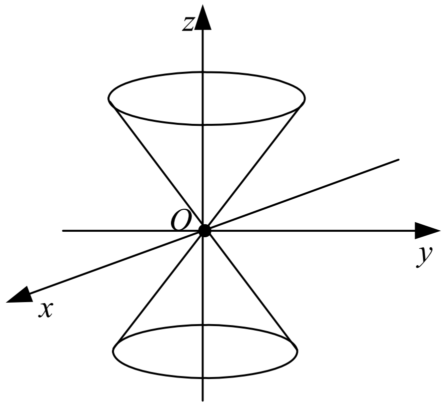

Рис. 42.

Цилиндры второго порядка

Определение

Поверхность, описываемая прямой, параллельной некоторому заданному направлению и пересекающей данную линию L, называется *цилиндрической.* При этом движущаяся прямая называется *образующей,* а прямая L - *направляющей* цилиндра.

Если образующая цилиндра параллельна какой-то из координатных осей, то цилиндрическая поверхность задается уравнением второго порядка с двумя переменными:

$F(x, y) = 0$, образующая параллельна оси Oz ;

$F(x, z) = 0$, образующая параллельна оси Oy ;

$F(y, z) = 0$, образующая параллельна оси Ox .

Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ (a, b > 0).$$

Уравнение не содержит переменной z , следовательно, цилиндр параллелен оси Oz . Направляющей цилиндра на плоскости xOy является эллипс с полуосями a и b . Цилиндрическая поверхность, описанная прямой, параллельной оси Oz , и пересекающей эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, построена на рисунке 43.

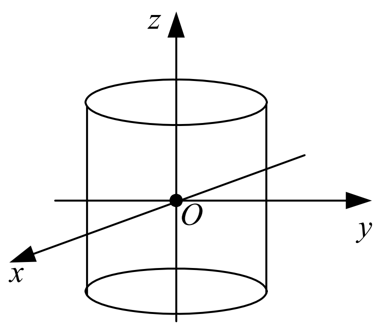

Рис. 43

Гиперболический и параболический цилиндры

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a,b>0)\ \text{ и }\ y^2=2px\ \ (p>0).$$

В данном случае направляющими линиями поверхностей являются гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и парабола $y^2=2px$, а образующими — прямые, параллельные оси Oz и проходящие через гиперболу или параболу в плоскости xOy. Поверхности изображены на рисунках 44 и 45.

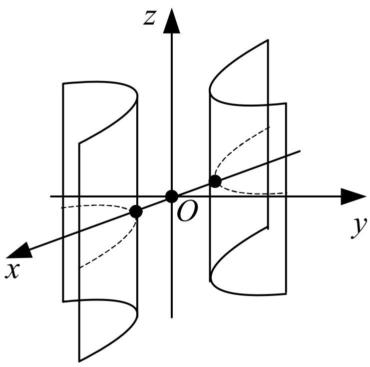

Рис. 44

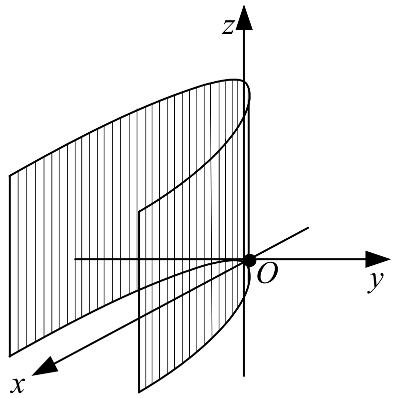

Рис. 45

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Каким уравнением задается в пространстве плоскость?
2. Как выглядит уравнение плоскости с нормальным вектором?
3. Какое уравнение называется общим уравнением плоскости?
4. Каков геометрический смысл коэффициентов при переменных в общем уравнении плоскости?
5. Какой вид имеет общее уравнение плоскости, параллельной координатной оси Ox? координатной оси Oy? координатной оси Oz?
6. Какой вид имеет общее уравнение плоскости, проходящей через начало координат?
7. Какой вид имеет общее уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости xOy? координатной плоскости zOy? координатной плоскости zOx?
8. При каком условии две плоскости параллельны? При каком условии две плоскости перпендикулярны?
9. Как выглядит уравнение плоскости в отрезках? Какие плоскости могут быть заданы этим уравнением?
10. Как задается в пространстве линия?
11. Какими уравнениями задается в пространстве прямая?
12. Какие уравнения прямой называются параметрическими?
13. Как выяснить, пересекаются ли две прямые в пространстве или скрещиваются?
14. Как определить направляющий вектор прямой, если она задана общими уравнениями?
15. Каким условием связаны нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой, если прямая и плоскость параллельны? Перпендикулярны?
16. Какой вид имеют уравнения координатных плоскостей?
17. Какой вид имеют уравнения координатных осей?
18. Какими уравнениями задается прямая на плоскости?
19. Какое уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом? Какие прямые не могут быть заданы таким уравнением?

20. Какие кривые относят к кривым второго порядка? Как выглядит общее уравнение кривой второго порядка?
21. Какая кривая называется эллипсом? Какой вид имеет каноническое уравнение эллипса?
22. Какая кривая называется гиперболой? Какой вид имеет каноническое уравнение гиперболы?
23. Как выглядят уравнения асимптот гиперболы, заданной каноническим уравнением?
24. Какая кривая называется параболой? Какой вид имеет каноническое уравнение параболы?
25. Что такое эксцентриситет кривой второго порядка? Что можно сказать про величину эксцентриситета эллипса? Гиперболы?
26. Чему равен эксцентриситет окружности? Параболы?
27. Какими координатами задается точка в полярной системе координат?
28. Как выглядят уравнения координатных линий в полярной системе координат?
29. Какая поверхность называется эллипсоидом? Какой вид имеет его уравнение? Какие линии получаются при сечении эллипсоида координатными плоскостями?
30. Какая поверхность называется однополостным гиперболоидом? Какой вид имеет его уравнение? Какие линии получаются при сечении однополостного гиперболоида координатной плоскостью xOy? xOz и yOz?
31. Какая поверхность называется двуполостным гиперболоидом? Какой вид имеет его уравнение? Какие линии получаются при сечении двуполостного гиперболоида плоскостями $z=\pm c$? Координатными плоскостями xOz и yOz?
32. Какая поверхность называется эллиптическим параболоидом? Какой вид имеет его уравнение? Какие линии получаются при сечении эллиптического параболоида плоскостями $z=\pm c$? Координатными плоскостями xOz и yOz?
33. Какая поверхность называется параболоидом вращения? Какой вид имеет его уравнение?
34. Какая поверхность называется гиперболическим параболоидом? Какой вид имеет его уравнение? Какие линии получаются при сечении гиперболического параболоида координатными плоскостями?
35. Какая поверхность называется конусом второго порядка? Какой вид имеет его уравнение? Какие линии получаются при сечении конуса плоскостями $z=\pm c$? Координатными плоскостями xOz и yOz?
36. Какие поверхности называются цилиндрическими? Какие линии называются ее образующей и направляющей?
37. В каком случае цилиндр называется эллиптическим? Параболическим? Гиперболическим?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Поверхности в пространстве и их уравнения.
2. Уравнение плоскости с нормальным вектором.
3. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя коллинеарными векторами. Взаимное расположение плоскостей.
4. Уравнение плоскости в отрезках.
5. Исследование общего уравнения плоскости.
6. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
7. Линии в пространстве. Общие уравнения прямой в пространстве. Приведение общих уравнений прямой в пространстве к каноническому виду.
8. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми.
9. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
10. Эллипс: определение, каноническое уравнение, исследование формы кривой, координаты фокусов, эксцентриситет.

11. Гипербола: определение, каноническое уравнение, исследование формы кривой, координаты фокусов, уравнения асимптот, эксцентриситет.
12. Парабола: определение, каноническое уравнение, исследование формы кривой, координаты фокуса, уравнение директрисы, эксцентриситет.
13. Полярная система координат.
14. Эллипсоид и сфера: канонические уравнения и их исследование методом сечений.
15. Гиперболоиды (однополостный и двуполостный): канонические уравнения и их исследование методом сечений.
16. Параболоиды (эллиптический и параболоид вращение): канонические уравнения и их исследование методом сечений.
17. Гиперболический параболоид: каноническое уравнение и его исследование методом сечений.
18. Коническая поверхность: каноническое уравнение и его исследование методом сечений.
19. Цилиндрические поверхности.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3. Аналитическая геометрия (14 часов)

10. Плоскость в пространстве. Уравнение плоскости с нормальным вектором. Уравнен6ие плоскости, заданной точкой и двумя коллинеарными векторами. Уравнение в отрезках. Взаимное расположение плоскостей (2 часа).
    Л.3: 466 (12,16), 469, 471 (6,7), 472, 500. 501, 517, 519, 521, 548, 549, 559, 560, 580, 581, 603, 607, 609, 612, 643.
11. Прямая в пространстве: канонические и параметрические уравнения. Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду. Взаимное расположение прямых (2 часа).
    Л.3: 526, 529, 545, 584, 587, 671,676, 702, 710, 722, 739, 748, 750, 752, 762.
12. Прямая и плоскость в пространстве. Взаимное расположение. Точка пересечения прямой и плоскости. (2 часа).
    Л.3: 650, 651, 652, 653, 658, 659, 661. 663, 664, 665, 766, 758, 759.
13. Прямая на плоскости.: уравнение с угловым коэффициентом, уравнение с нормальным вектором, каноническое уравнение, уравнение в отрезках. Угол между прямыми (2 часа).
    Л.3: 650, 651, 652, 653, 658, 659, 661. 663, 664, 665, 766, 758, 759.
14. Контрольная работа (2 часа).
    - Задача на скалярное произведение.
    - Задача на векторное или смешанное произведение.
    - Задача на прямую и плоскость в пространстве.
    - Задача на прямую на плоскости.
15. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Построение кривых в полярной системе координат и кривых, заданных параметрически. Выдача домашнего задания на кривые и поверхности (2 часа).
    Л.3: 650, 651, 652, 653, 658, 659, 661. 663, 664, 665, 766, 758, 759.
16. Прием Т.Р.1 и домашнего задания на кривые (2 часа).

7. Тест по теме 3 «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

1. Как расположен по отношению к плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор $\{A;\ B;\ C\}$? Укажите номер верного ответа в таблице 6.

Таблица 6

1	2
Коллинеарен плоскости	Ортогонален плоскости