Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 4. **ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ**

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 22.161

УДК 517.50

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева. Высшая математика. Тема 4. Теория пределов. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005*. с. 23.*
Ил. 15 . Табл. 26 . Библиогр.: 8 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Теория пределов», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. В разделе «теоретический материал содержится также необходимый набор типовых задач с подробным разбором решения. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 4. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор А.В. Гришкина

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 1 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 4 «Теория пределов».
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 1 - го СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план

№ темы	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Всего аудиторных	Из них		
				Лекции	Практические занятия	
1	Элементы линейной алгебры.	50	28	14	14	22
2	Векторная алгебра.	18	8	4	4	10
3	Аналитическая геометрия.	48	28	14	14	20
4	Теория пределов.	48	28	14	14	20
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1.	26	16	8	8	10
Всего за 1 семестр		190	108	54	54	82

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

4. Теория пределов (14 часов)

17. Вещественная числовая ось. Расширенная числовая ось. Множества на расширенной числовой оси. Окрестности на расширенной числовой оси. Проколотая окрестность конечной точки. Классификация точек множества: внутренняя, внешняя и граничная, изолированная и предельная. Открытые и замкнутые множества. Определение конечного предела функции в конечной точке. Окрестности бесконечных точек. Определение бесконечного предела и предела в бесконечной точке (2 часа).
18. Правая и левая окрестности конечных точек. Односторонние пределы. Теорема о пределе функции, тождественно равной постоянной. Единственность предела. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой переменной. Первый замечательный предел. (2 часа).
19. Ограниченные функции. Функции, ограниченные в некоторой окрестности. Ограниченность функции, имеющий конечный предел. Бесконечно малые (б. м.) и бесконечно большие (б. б.) функции. Необходимое и достаточное условие существования конечного предела в конечной точке. Свойства б.м. и б. б. (2 часа).
20. Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел. Действия на расширенной числовой оси. Виды неопределенностей (2 часа).
21. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие. Главные части бесконечно малых функций и бесконечно больших функций. Главная часть произведения бесконечно малых и бесконечно больших. Сумма и разность бесконечно малых и бесконечно больших. Таблица эквивалентных б. м. и б. б. (2 часа).
22. Второй замечательный предел. Пределы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(x+1)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^\mu-1}{x}$. Таблица эквивалентных б. м. и б. б. Неопределенности, возникающие при вычислении пределов $\lim\limits_{x\to 0}u(x)^{v(x)}$. (2 часа).
23. Функция, непрерывная в точке. Функция, непрерывная на промежутке. Терема о приращении непрерывной функции. Непрерывность основных элементарных функций и их суперпозиций. Свойство функций, непрерывных на замкнутом множестве. Классификация разрывов (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

1. Теория пределов
    - 1.1. Множества на числовой оси
    - 1.2. Определение предела функции
    - 1.3. Односторонние пределы. Предел последовательности
    - 1.4. Основные свойства пределов
    - 1.5. Первый замечательный предел
    - 1.6. Ограниченные функции
    - 1.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (б.м. и б.б)
    - 1.8 Свойства б.м. и б.б. функций
    - 1.9. Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел. Вычисление пределов.
    - 1.10. Сравнение б.м. и б.б. функций
    - 1.11. Главная часть б.м. и б.б. функций
    - 1.12. Второй замечательный предел
    - 1.13. Показательные неопределенности
    - 1.14. Непрерывность функций

1. Теория пределов

1.1. Множества на числовой оси

Определение 1. _Окрестностью радиуса_ $h>0$ _конечной точки_ x_0 или h - окрестностью точки x_0 называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x_0-h<x<x_0+h$, т. е. множество $(x_0-h;\,x_0+h)$ (рис. 1).

Обозначается: $U_h(x_0)$.

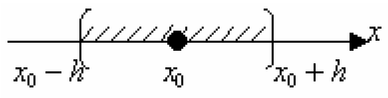

Рис. 1.

Если $x\in U_h(x_0)$, то x удовлетворяет неравенству

$$|x-x_0|<h \Leftrightarrow -h<x-x_0<h \Leftrightarrow x_0-h<x<x_0+h.$$

Расширим систему вещественных чисел, добавив к ним два символа $-\infty$ и $+\infty$, которые назовём _бесконечно-удалёнными точками_ числовой оси. Определим для этих точек следующие свойства:

1) Если $x\in R$ и является конечным числом, то

$x+\infty=+\infty$; $x-\infty=-\infty$; $\dfrac{x}{-\infty}=\dfrac{x}{+\infty}=0$;

2) Если $x>0$, то $x\cdot(+\infty)=+\infty$, $x\cdot(-\infty)=-\infty$;

3) Если $x<0$, то $x\cdot(+\infty)=-\infty$, $x\cdot(-\infty)=+\infty$;

Определение 2. Пусть $h>0$. h**-**_окрестностью точки_ $(+\infty)$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x>h$, т. е. множество $(h;+\infty)$ (рис. 2). *Обозначение:* $U_h(+\infty)$.

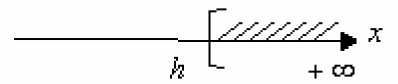

Рис.2.

Тогда $x\in U_h(+\infty) \Leftrightarrow x>h$.

Определение 3. Пусть $h>0$ h**-**_окрестностью точки_ $(-\infty)$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x<-h$, т. е. множество $(-\infty;-h)$ (рис. 3). *Обозначение:* $U_h(-\infty)$.

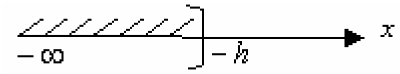

Рис. 3.

Тогда $x\in U_h(-\infty) \Leftrightarrow x<-h$.

Определение 4. Пусть $h>0$. _Проколотой_ h _-окрестностью точки_ x_0 называется множество чисел $x\in U_h(x_0)$ и $x\neq x_0$ (рис. 4). Обозначение: $\dot{U}_h(x_0)$.

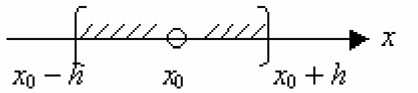

Рис. 4.

Тогда $x\in \dot{U}_h(x_0) \Leftrightarrow |x-x_0|<h,\ x\neq x_0 \Leftrightarrow 0<|x-x_0|<h$.

Определение 5. Точка x_0 называется _точкой сгущения (или предельной точкой) множества_ X **)**, если в любой проколотой окрестности точки x_0 находится хотя бы один элемент данного множества X.

Можно показать, что в любой окрестности точки сгущения находится бесконечное множество элементов множества X.

Точка сгущения может принадлежать множеству, но может ему и не принадлежать. Например, для множеств $(1;2)$ и $[1;2]$ точки 1 и 2 являются точками сгущения.

Определение 6. Точка, принадлежащая множеству и не являющаяся его точкой сгущения, называется *изолированной*. Например, во множестве натуральных чисел $\{n\}$ каждая конечная точка является изолированной. Множество имеет единственную предельную точку $x_0 = +\infty$. Действительно, в любой окрестности точки $x_0 = +\infty$, т.е. в окрестности $U_h(+\infty) = (h; +\infty)$ находится бесконечное множество натуральных чисел (рис. 5).

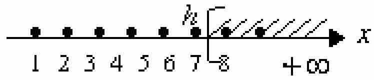

Рис. 5.

1.2. Определение предела функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, X - её область определения, x_0 - точка сгущения множества X.

Определение. Конечное или бесконечное число A называется *предел функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$, если для любой окрестности точки A найдётся такая окрестность точки x_0, что для всех x из области определения X и найденной проколотой окрестности точки x_0 соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в заданную окрестность точки A.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} A$.

Запишем это определение в другой форме, используя символы: $\forall$ - для любой; $\exists$ - существует (найдётся); :- такая что; $\Rightarrow$- следует; $\Leftrightarrow$- равносильно.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\, \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Если известно, что x_0 и A - конечные или бесконечные числа, то можно дать определение предела без использования понятия окрестности. При этом записи $x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0)$ и $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ следует заменить соответствующими неравенствами.

Рассмотрим некоторые случаи значений x_0 и A.

1). Пусть x_0, A- конечные числа (рис. 6) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X$ и $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

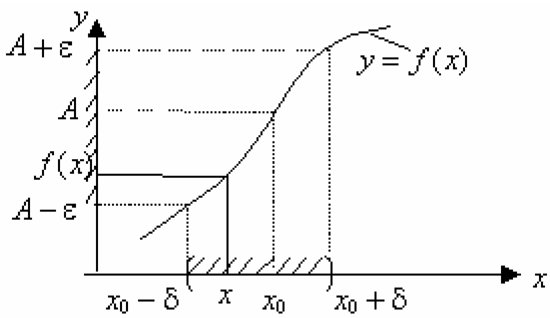

Рис. 6.

2). Пусть x_0- конечное число, $A = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X$ и $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ (рис. 7).

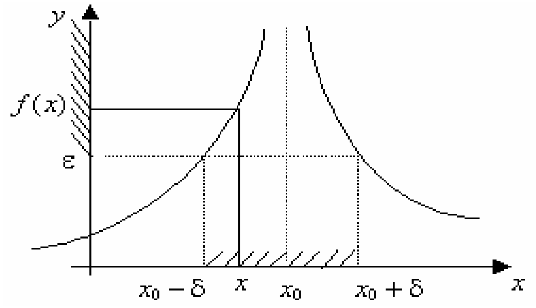

Рис. 7.

1.3. Односторонние пределы. Предел последовательности

Определение 1. Пусть $h > 0$. *Правосторонней* h*-окрестностью* *точки* x_0 называется множество точек $x : x \in (x_0; h + x_0)$, где $h > 0$ (рис. 8).

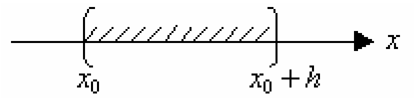

Рис. 8.

Левосторонней h*-окрестностью* *точки* x_0 называется множество точек $x : x \in (x_0 - h; x_0)$,где $h > 0$ (рис. 9).

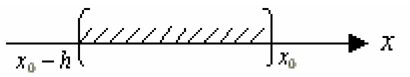

Рис. 9.

Правая и левая окрестности обозначаются: $U_h^+(x_0)$ и $U_h^-(x_0)$ соответственно.

Определение 2 (Правостороннего предела).

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists\, U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta^+(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Определение 3 (Левостороннего предела).

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists\, U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta^-(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Из определений ясно, предел в конечной точке существует только тогда, когда оба односторонних предела в этой точке существуют и они равны между собой.

Пример. Выясните, имеет ли функция $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ предел в точке $x = 0$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для точек $x_0 = \pm\infty$ понятие окрестности совпадает с понятием правосторонней или левосторонней окрестности. Поэтому $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ совпадает с соответствующим право-(или лево) сторонним пределом функции.

Поскольку последовательность – это функция натурального аргумента, то единственной точкой сгущения области определения числовой последовательности является точка $+\infty$. Поэтому предел последовательности может быть определен только при аргументе $n \to \infty$.

Определение 4 (Предел числовой последовательности).

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists \text{ число } M \in N : \forall n > M \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A).$$

При этом, если A- конечное число, то определение предела можно записать в виде: $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathrm{N} : \forall n > M \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon$.

1.4. Основные свойства пределов

Теорема 1. (Единственность предела).
Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то он единственный.

Доказательство. (От противного).

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$. Тогда по определению конечного предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left|f(x) - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Найдём

$$\begin{aligned} &\left|A - B\right| = \left|A - B + f(x) - f(x)\right| = \left|(A - f(x)) + (f(x) - B)\right| \le \\ &\le \left|A - f(x)\right| + \left|f(x) - B\right| = \left|f(x) - A\right| + \left|f(x) - B\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Получили, что $\left|A - B\right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Поскольку модуль – число не отрицательное, то неравенство $\left|A - B\right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ может быть выполнено только в случае $A - B = 0$, т. е. $A = B$.

Теорема 2. (Предельный переход в неравенстве).
Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то $A \le B$.

Доказательство. Пусть X — общая область определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда по определению предела функции

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists U_{\delta_1}(x_0) : \forall x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0) \cap X \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ \exists U_{\delta_2}(x_0) : \forall x \in \dot{U}_{\delta_2}(x_0) \cap X \Rightarrow \left|g(x) - B\right| < \varepsilon.$$

Если в обоих случаях взять одно и то же $\varepsilon > 0$ и из найденных окрестностей $U_{\delta_1}(x_0)$ и $U_{\delta_2}(x_0)$ выбрать наименьшую, т. е. $U_\delta(x_0) = U_{\delta_1}(x_0) \cap U_{\delta_2}(x_0)$, то для $x \in \dot{U}_\delta(x_o) \cap X$ выполняются оба неравенства одновременно, т. е.

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,\ B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon = \dfrac{A - B}{2}$, предположив противное, т. е. пусть $A > B$. Тогда

$$\begin{cases} A - \dfrac{A-B}{2} < f(x) < A + \dfrac{A-B}{2} \\ B - \dfrac{A-B}{2} < g(x) < B + \dfrac{A-B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A+B}{2} < f(x) < \dfrac{3A-B}{2} \\ \dfrac{3B-A}{2} < g(x) < \dfrac{A+B}{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) < \frac{A+B}{2} < f(x),$$

из последнего неравенства следует, что $g(x) < f(x)$, что противоречит условию теоремы, значит наше предположение $A > B$ неверно. Тогда верным является неравенство $A \le B$.

Теорема 3. (Предел суперпозиции, т. е. сложной функции).
Если:

1) $f(y)$ и $g(x)$ таковы, что можно образовать их суперпозицию $F(x) = f(g(x))$,

2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, точка A- является точкой сгущения области определения функции $f(y)$,

3) существует $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$,

то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = B$.

Доказательство. Пусть X - область определения функции $g(x)$, Y - область определения функции $f(y)$. По определению предела функции

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A \Leftrightarrow \forall U_{h_1}(A)\ \exists U_\delta(x_0): \forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow g(x) \in U_{h_1}(A),$$

$$\lim_{y\to A} f(y) = B \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(B)\ \exists U_{h_2}(A): \forall y \in \overset{\bullet}{U}_{h_2}(A) \cap Y \Rightarrow f(y) \in U_\varepsilon(B).$$

Возьмём $h = \min\{h_1; h_2\}$. Тогда получим

$$\forall U_\varepsilon(B)\ \exists U_\delta(x_0): \forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow f(g(x)) \in U_\varepsilon(B).$$

Значит, по определению предела функции $B = \lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$.

Теорема 4. (О сжатой функции)
Если в некоторой окрестности точки x_0 три функции связаны неравенством $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Доказательство. Пусть X - общая область определения трёх функций, тогда

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_{\delta_1}(x_0): \forall x \in \overset{\bullet}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap X \Rightarrow |\varphi(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_{\delta_2}(x_0): \forall x \in \overset{\bullet}{U}_{\delta_2}(x_0) \cap X \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon.$$

Найдём окрестность $U_\delta(x_0) = U_{\delta_1}(x_0) \cap U_{\delta_2}(x_0)$, тогда для $\forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X$ выполняются оба неравенства одновременно:

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon \text{ и } A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$

Но так как $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, то $A - \varepsilon < \varphi(x) \le f(x) \le g(x) < A + \varepsilon$, а это означает, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

1.5. Первый замечательный предел

Сначала докажем, что при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\boxed{\sin x < x < \operatorname{tg} x}$.

Возьмём I четверть тригонометрического круга и отложим угол x радиан (рис. 10).

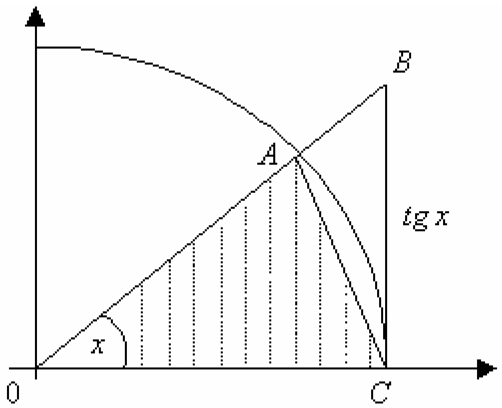

Рис. 10.

Очевидно, что $S_{\Delta OAC} < S_{сек.OAC} < S_{\Delta OBC}$, найдём эти площади, зная, что радиус окружности равен 1.

$$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC\cdot\sin(OA\hat{;}OC)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x\,,\; S_{сек.OAC}=\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot x=\frac{1}{2}\cdot x\,,$$

$$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} x\,.$$

Значит, $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}\cdot x<\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} x\Rightarrow\sin x<x<\operatorname{tg} x \quad \forall x\in(0;\frac{\pi}{2})$.

Теперь докажем, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ — ___первый замечательный предел___.

Рассмотрим $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\; x\neq 0$. Тогда в силу нечётности справедливо неравенство

$$|\sin x|<|x|<|\operatorname{tg} x|,\;(x\neq 0),\Leftrightarrow 1<\left|\frac{x}{\sin x}\right|<\left|\frac{1}{\cos x}\right|.$$

Так как в I и $\mathrm{I}V$ четвертях все выражения под знаком модуля положительные (в $\mathrm{I}V$ четверти $x<0$ и $\sin x<0$), то $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Rightarrow 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то, по теореме о сжатой функции существует $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

1.6. Ограниченные функции

Определение. Функция $f(x)$ называется ___ограниченной на множестве___ X, если $\exists k>0:\forall x\in X\Rightarrow|f(x)|\le k$. (или существуют числа $M,N:\forall x\in X\Rightarrow M\le f(x)\le N$).

Например, $f(x)=\sin x$ - ограниченная функция на $(-\infty;+\infty)$, т.к. $|\sin x|\le 1$ при любых x.

Если функция не является ограниченной на множестве X, то её называют ___неограниченной___. Следовательно, $f(x)$ не ограничена на X, если для любого сколь угодно большого $k>0$ существует хотя бы один $x^*\in X:|f(x^*)|>k$.

Теорема 1. Если функция имеет конечный предел при $x\to x_0$, то функция ограничена в окрестности предельной точки x_0.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\,U_\delta(x_0):\forall x\in\dot{U}_\delta(x_0)\cap X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

Обозначим $A-\varepsilon=M$ и $A+\varepsilon=N$. Тогда $\forall x\in\dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется $M\le f(x)\le N$, т. е. $f(x)$ - ограниченная.

Теорема 2. Если существует конечный ненулевой предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности предельной точки x_0.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, где $A\neq 0$. Тогда справедливо

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\,U_\delta(x_0):\forall x\in\dot{U}_\delta(x_0)\cap X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon,\text{ или}$$

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Так как $A\neq 0$, то для достаточно малого $\varepsilon>0$ все части последнего неравенства имеют одинаковые знаки $\Rightarrow\frac{1}{A+\varepsilon}<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{A-\varepsilon}\Rightarrow\frac{1}{f(x)}$ - ограничена в окрестности предельной точки.

Теорема 3. Если функция имеет бесконечный предел, то она неограниченна в окрестности предельной точки.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists U_\delta(x_0): \forall x\in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)|>\varepsilon$.

Последнее неравенство и означает, что функция в окрестности предельной точки x_0 является неограниченной.

1.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (б.м. и б.б.)

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется _бесконечно малой (б.м.) в точке_ x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Теорема. Для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(x)$ можно было представить в виде $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м. в точке x_0.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists U_\delta(x_0): \forall x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

Обозначим $f(x)-A=\alpha(x)\Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$, иначе говоря

$$\forall\varepsilon>0\ \exists U_\delta(x_0): \forall x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X \Rightarrow |\alpha(x)-0|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Следовательно $\alpha(x)$ — б. м. в точке x_0, где $\alpha(x)=f(x)-A \Rightarrow f(x)=A+\alpha(x)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется _бесконечно большой (б.б.) в точке_ x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ.

В определении б.б. функции $f(x)\to\infty$, это значит, что охватываются случаи стремления $f(x)\to+\infty$ или $f(x)\to-\infty$. Однако можно привести пример б.б. функции, которая не стремится к $+\infty$ или $-\infty$.

Например, $f(x)=\operatorname{tg} x$ - б.б. в точке $x=\frac{\pi}{2}$, хотя $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ не существует. Действительно

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x=+\infty$. Односторонние пределы не равны. Однако $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}|\operatorname{tg} x|=+\infty$, т. е. $f(x)=\operatorname{tg} x$ - б.б. в точке $x=\frac{\pi}{2}$.

1.8. Свойства б.м. и б.б. функций

Теорема 1. Если $\alpha(x)$ б.м. в точке x_0, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - б.б. в точке x_0 и если $f(x)$ б.б. в точке x_0, то $\frac{1}{f(x)}$ - б.м. в точке x_0.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ б.м. в точке x_0. Обозначим $\frac{1}{\alpha(x)}=f(x)$ и X - область определения функции $\alpha(x)$. Возьмём $E>0$ - сколь угодно большое число, тогда $\dfrac{1}{E}=\varepsilon$ - сколь угодно малое число. Так как $\alpha(x)$ б.м. в точке x_0, то для $\varepsilon=\dfrac{1}{E}>0$

$$\exists U_\delta(x_0): \forall x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|=\left|\frac{1}{\alpha(\delta)}\right|=\frac{1}{|\alpha(\delta)|}>\frac{1}{\varepsilon}=E$$

Итак, $\forall\varepsilon>0\ \exists U_\delta(x_0): \forall x\in \dot{U}_\delta(x_0)\cap X \Rightarrow |f(x)|>E$, т. е. $f(x)$ — б.б. в точке x_0. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы.

Теорема 2. Произведение функции, б.м. в точке x_0, на ограниченную функцию в окрестности точки x_0 есть б.м. функция в той же точке.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ - б.м. в точке x_0, а $\varphi(x)$ - ограниченная в $U_\delta(x_0)$, т.е. $|\varphi(x)| \le k$ для всех значений $x \in U_\delta(x_0)$. Обозначим $f(x) = \alpha(x)\cdot\varphi(x)$. Пусть X - область определения для функций $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и найдём $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Так как $\alpha(x)$ б.м. в точке x_0, то по $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{k}$ найдём $U_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Тогда для $x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X$ справедливо неравенство:

$$|f(x)| = |\alpha(x)\cdot\varphi(x)| = |\alpha(x)|\cdot|\varphi(x)| \le \frac{\varepsilon}{k}\cdot k = \varepsilon \Rightarrow f(x) \text{ б.м. в точке } x_0.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, т. к. $\sin x$ - ограниченная для всех x, а $\dfrac{1}{x}$ - б.м. в точке $\pm\infty$.

Следствия:

1). Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть б.м. в той же точке. Действительно б.м. функция является ограниченной, т. к. имеет конечный предел.

2). Произведение конечного числа бесконечно больших функций есть б.б. в той же точке. Действительно, если $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ - б.б., то

$$f(x) = \varphi_1(x)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_1(\tilde{o})}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\frac{1}{\varphi_{\ddot{\imath}}(\tilde{o})}} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_1(\tilde{o})}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\varphi_{\ddot{\imath}}(\tilde{o})}},$$

откуда следует, что функции $f(x)$ представляет собой $\dfrac{1}{\text{á.ì.}}$, то есть б.б.

Теорема 3. Сумма конечного числа функций, б.м. в точке x_0, является б.м. функцией в той же точке.

Доказательство. Пусть $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ - б.м. в точке x_0. Тогда возьмём любое сколь угодно малое $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, для которого

$$\exists U_{\delta_1}(x_0) : \forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |\alpha_1(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } \exists U_{\delta_2}(x_0) : \forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |\alpha_2(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) = \overset{\bullet}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap \overset{\bullet}{U}_{\delta_2}(x_0) : \forall x \in \overset{\bullet}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом, $f(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ - б.м. в точке x_0.

Сформулируем еще два свойства для бесконечно больших функций:

Сумма конечного числа функций, б. б. в одной точке, и имеющих одинаковый знак, является б.б. того же знака в той же точке.

Сумма функции, б.б. в точке x_0, и ограниченной функцию в окрестности точке x_0 есть б.б. функция в той же точке.

1.9. Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел. Вычисление пределов

Теорема 1. Если существуют конечные пределы двух функций $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то $\exists$ $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$

Доказательство.

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{ - б.м. в точке } x_0.$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = B \Rightarrow g(x) = B + \beta(x), \text{ где } \beta(x) \text{ - б.м. в точке } x_0.$$

Тогда $f(x)+g(x)=A+B+(\alpha(x)+\beta(x))$, где $(\alpha(x)+\beta(x))$ - б.м. в точке x_0. Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B.$$

Теорема 2. Если существуют конечные пределы двух функций $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, то $\exists$ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$

Доказательство.

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow f(x)=A+\alpha(x)\text{, где } \alpha(x) \text{ - б.м. в точке } x_0.$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} g(x)=B \Rightarrow g(x)=B+\beta(x)\text{, где } \beta(x) \text{ - б.м. в точке } x_0.$$

Найдём $f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x))=A\cdot B+(A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x))$, где $B\cdot\alpha(x)$ и $A\cdot\beta(x)$, а также $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ являются б.м. в точке x_0. Значит $f(x)\cdot g(x)=A\cdot B+(б.м.)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$.

Теорема 3. Если существуют конечные пределы двух функций $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0$, то $\exists$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Доказательство. Из определения предела следует, что справедливы утверждения:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow f(x)=A+\alpha(x)\text{, где } \alpha(x) \text{ - б.м. в точке } x_0.$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=B \Rightarrow g(x)=B+\beta(x)\text{, где } \beta(x) \text{ - б.м. в точке } x_0.$$

Найдём разность

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A\cdot B+B\cdot\alpha(x)-A\cdot B-A\cdot\beta(x)}{B\cdot(B+\beta(x))}=\frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B^2+B\cdot\beta(x)}=$$

$$(B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x))\cdot\frac{1}{B^2+B\cdot\beta(x)}=\text{(б.м.) (огр.)=(б.м.)}$$

где $\dfrac{1}{B^2+B\cdot\beta(x)}$ - ограниченная, т. к. знаменатель стремится к $B^2\neq 0$.

Таким образом $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}+(б.м.)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x)=\lim_{x\to x_0} C\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=C\cdot\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Рассмотрим все возможные случаи, которые могут встретиться при вычислении пределов суммы, произведения и отношения функций.

Вычисление предела суммы $f(x)+g(x)$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда, если:

1. A,B - конечные числа $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$.
2. $A=+\infty, B=+\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[+\infty+\infty]=+\infty$.
3. $A=-\infty, B=-\infty \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[-\infty-\infty]=-\infty$.

4. $A=+\infty, B$ - конечное $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[+\infty+B]=\infty$.

5. $A=+\infty, B=-\infty$ $\boxed{\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=[+\infty-\infty]}$ неопределённость.

Примеры:

1). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^4}=\dfrac{-1}{+0}=-\infty$.

2). $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2\cdot x}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-2\cdot x}{x^2-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}=-\dfrac{1}{2}$.

Вычисление предела произведения $f(x)\cdot g(x)$.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда, если:

1. A, B - конечные числа $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$.
2. $A\neq 0, B=\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=[A\cdot\infty]=\infty$.
3. $A=0, B=\infty$ $\boxed{\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=[0\cdot\infty]}$ неопределённость.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg} x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Вычисление предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда, если:

1. A,B - конечные числа, $B\neq 0$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.
2. $A\neq 0, B=0$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{A}{0}\right]=\left[\dfrac{A}{б.м.}\right]=\left[A\cdot\dfrac{1}{б.м.}\right]=\infty$.
3. A-конечное, $B=\infty$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{A}{\infty}\right]=0$.
4. $A=\infty$, B - конечное, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{B}\right]=\infty$.
5. $A=\infty, B=0$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{0}\right]=\infty$.
6. $A=0, B=\infty$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{\infty}\right]=0$.
7. $A=0, B=0$, $\boxed{\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]}$ - неопределённость.
8. $A=\infty, B=\infty$, $\boxed{\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]}$ - неопределённость.

Примеры.

1). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3\cdot x+2}{x^3-4\cdot x^2+3\cdot x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-3)}=\dfrac{1}{2}$.

2). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4\cdot x^3}{x^2+3\cdot x-x^3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\cdot(\frac{1}{x}-4)}{x^3\cdot(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-1)}=4$.

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2\cdot x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cdot x}{2\cdot x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=-\dfrac{1}{4}$.

1.10. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций (б.м. и б.б)

Определение 1. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м. в точке x_0, тогда

1). Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется *б.м. более высокого порядка относительно* *б.м.* $\beta(x)$. *Обозначение:* $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

2). Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, где $C\neq 0, C\neq\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется *б.м. одинакового порядка*.

3). Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми*.

Пример. Сравнить $\alpha(x)=x^2-1$ и $\beta(x)=x-1$ в точке $x=1$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\Rightarrow\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка.

Определение 2. Две б.м. функции называются *эквивалентными* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Обозначается: $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x)$.

Примеры. 1) $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2) $\operatorname{tg}x\underset{x\to 0}{\sim}x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

3) $1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$.

4) $\arcsin x\underset{x\to 0}{\sim}x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$.

5) $\operatorname{arctg}x\underset{x\to 0}{\sim}x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\operatorname{tg}y}=1$.

Свойства эквивалентных б.м.

Теорема 1. Сумма функций, б.м. в точке x_0, разного порядка эквивалентна б.м. меньшего порядка.

Доказательство.

Пусть $\beta(x)$ - б.м. в точке x_0 более высокого порядка, чем $\alpha(x)$. Рассмотрим $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$.

Найдём $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1+0=1$, то есть $\alpha(x)+\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha(x)$.

Теорема 2. Предел отношения двух б.м. функций в точке x_0 не изменится, если числитель и знаменатель заменить на эквивалентные им б.м. функции. Иначе:

$$\text{если } \alpha(x)\sim\alpha_1(x) \text{ и } \beta(x)\sim\beta_1(x),\quad x\to x_0, \text{ то } \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Теорема 3. Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, $x\to x_0$, то $\alpha(x)\cdot\beta(x)\sim\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x)$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1.$$

Теорема 4. Сумма б.м. функций эквивалентна сумме эквивалентных им б.м., если заданная сумма не является разностью эквивалентных б.м.

Пример.

$\operatorname{tg}x-\sin x\underset{x\to 0}{\not\sim}x-x$, поскольку ноль является конечным числом, а не бесконечно малой функцией. В этом случае постараемся разложить заданное выражение на множители. $\operatorname{tg}x-\sin x=\sin x\cdot\left(\dfrac{1-\cos x}{\cos x}\right)\underset{x\to 0}{\sim}x\cdot\dfrac{\frac{x^2}{2}}{1}=\dfrac{x^3}{2}$.

Определение 3. Пусть $U(x)$ и $V(x)$ - б.б. в точке x_0. Тогда:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}=\infty$, то $U(x)$ называется *б.б. высшего порядка относительно* $V(x)$. В этом случае $V(x)$ - б.б. низшего порядка относительно $U(x)$. Очевидно $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{V(x)}{U(x)}=0$.

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}=C$, где $C\neq 0, C\neq\infty$, то $U(x)$ и $V(x)$ называются *б.б. одинакового порядка*.

3) если $\nexists\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}$, то $U(x)$ и $V(x)$ называются *несравнимыми*.

4) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}=1$, то $U(x)$ и $V(x)$ называются *эквивалентными*: $U(x)\underset{x\to x_0}{\sim}V(x)$.

Свойства эквивалентных б.б. функций.

Отметим лишь некоторые свойства.

1) Сумма б.б. функций разного порядка эквивалентна б.б. высшего порядка.

2) Предел отношения б.б. не изменится, если числитель и знаменатель заменить на эквивалентные б.б. Иначе: *если* $U(x)\sim U_1(x)$ *и* $V(x)\sim V_1(x)$, $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U(x)}{V(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{U_1(x)}{V_1(x)}$

3) Сумма б.б. функций можно заменить на сумму эквивалентных б.б., если заданная сумма не является разностью эквивалентных б.б.

4) Если $U(x)\sim U_1(x)$ и $V(x)\sim V_1(x)$, $x\to x_0$, то $U(x)\cdot V(x)\sim U_1(x)\cdot V_1(x)$.

1.11. Главная часть б.м. и б.б. функций

Для каждой б.м. или б.б. функции существует бесконечное множество эквивалентных функций. Например, при $x\to 0$ б.м. функция $\operatorname{tg}x\sim\sin x;\sim\arcsin x;\sim x$ и т. д.

Естественно при вычислении пределов использовать замену на простейшую эквивалентную функцию.

Определение 1. Пусть $\alpha(x)$ - простейшая б.м. в точке x_0, а $\beta(x)$ - другая б.м. в той же точке x_0. Если $\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim}C(\alpha(x))^k$, где C, k - постоянные числа, $C\neq 0$, то бесконечно малую $C(\alpha(x))^k$ называют *главной частью* $\beta(x)$. Число k называют *порядком* функции $\beta(x)$ относительно $\alpha(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Вид главной части зависит от того, конечным или бесконечным является число x_0. Пусть $\beta(x)$ - б.м. в точке x_0, то

1) Если $x_0 = a$ - конечное число, то главная часть функции $\beta(x)$ имеет вид $C\cdot(x-a)^k$.

2) Если $x_0 = \infty$, то главная часть функции $\beta(x)$ имеет вид $C\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k$.

Определение 2. Пусть $U(x)$ - простейшая бесконечно большая в точке x_0, $V(x)$ **-** другая бесконечно большая в той же точке x_0. Если $V(x) \underset{x\to x_0}{\sim} C(U(x))^k$, где C,k - постоянные числа, $C\neq 0$, $k>0$, то бесконечно большую $C(U(x))^k$ называют <u>*главной частью*</u> функции $V(x)$. Число k называют <u>*порядком*</u> функции $V(x)$ относительно $U(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Пусть $V(x)$ - б.б. в точке x_0. Тогда:

1). если $x_0 = a$ - конечное число, то главная часть функции $V(x)$ имеет вид $C\cdot\left(\frac{1}{x-a}\right)^k$.

2). если $x_0=\infty$, то главная часть функции $V(x)$ имеет вид $C\cdot(x)^k$.

1.12. Второй замечательный предел

Теорема. Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, где $n=1,2,\ldots$, стремится к конечному пределу, заключенному между числами 2 и 3.

Доказательство. Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$\left(1+x\right)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+x^n \quad \text{При}$$

$$x=\frac{1}{n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\ldots+\frac{1\cdot\ldots(n-1)n}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{n(n-1)\ldots(1+n-n)}{n^n}\right)=$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-(n-1)}{n}\right)=$$

$$=2+\frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{>0}+\frac{1}{2\cdot 3}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{>0}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{>0}.$$

Так как слагаемые положительные, то последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет наименьшее значение 2, а затем растет с увеличением n.

С другой стороны, так как выражения $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$ и т.д., то

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\underbrace{3}_{>2}}+\ldots+\frac{1}{2\cdot\underbrace{3\cdot\ldots\cdot n}_{>2\cdot 2\ldots 2}} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Таким образом $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$, то есть последовательность ограниченная возрастающая. Тогда она имеет предел, заключенный между 2 и 3. Этот предел обозначают числом e, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Выяснено, что e — это иррациональное число (оно называется числом Непера). Это число вычислено $e\cong 2{,}7182818284...$

Полученное предельное соотношение можно записать в другом виде, обозначив $\frac{1}{n}=z \quad \Rightarrow \quad n=\frac{1}{z}$:

$$\boxed{\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e}$$ — *второй замечательный предел*.

Определение. *Натуральными* называются логарифмы, за основание которых принято число e. *Обозначение:* $\ln x=\log_e x$.

Пользуясь вторым замечательным пределом, докажем несколько эквивалентностей:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1 \quad \Rightarrow \ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{\frac{x}{\ln a}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}{\frac{x}{\ln a}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \log_a(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{\ln a}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{a^x-1}{\log_a\left(1+\left(a^x-1\right)\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{\ln a}}{\log_a(1+y)}=1\Rightarrow$$

$$a^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x\ln a.$$

Как частный случай $e^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{ax}=1 \qquad \Rightarrow \qquad (1+x)^a-1\underset{x\to 0}{\sim} ax.$$

Таблица 3. Таблица эквивалентных бесконечно малых

1	$\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x$	5	$1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}$
2	$\operatorname{tg} x\underset{x\to 0}{\sim} x$	6	$\log_a(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{\ln a}\Rightarrow \ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x$
3	$\arcsin x\underset{x\to 0}{\sim} x$	7	$a^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x\ln a\Rightarrow e^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x$
4	$\operatorname{arctg} x\underset{x\to 0}{\sim} x$	8	$(1+x)^a-1\underset{x\to 0}{\sim} ax$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x\sin x)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

1.13. Показательные неопределенности

Определение. Функция вида $y=(u(x))^{v(x)}$, где $u(x)>0$ называется *показательно-степенной*. Так как $(u(x))^{v(x)}=e^{\ln(u(x))^{v(x)}}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\cdot\ln u(x)}=\textit{по т. о пределе}\cdot\textit{суперпозиции}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\cdot\ln u(x)}$$

Возможны следующие неопределенности:

$\left[1^\infty\right]$, если $u\to 1, v\to\infty$. Тогда $\lim u^v=\left[1^\infty\right]=e^{\lim v\ln u}=e^{[\infty\cdot 0]}$,

$\left[\infty^0\right]$, если $u\to\infty, v\to 0$. Тогда $\lim u^v=\left[\infty^0\right]=e^{[0\cdot\infty]}$,

$\left[0^0\right]$, если $u\to 0, v\to 0$. Тогда $\lim u^v=\left[0^0\right]=e^{[0\cdot\infty]}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln\frac{x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\left(-\frac{1}{x}\right)}=e^{-2}$

1.14. Непрерывность функций

Определение 1. Пусть дана функция $y=f(x)$. Рассмотрим два значения ее аргумента x и x_0. Разность $x-x_0=\Delta x$ называется <u>*приращением аргумента*</u> x в точке x_0. Разность $y-y_0=f(x)-f(x_0)=\Delta y$ называется <u>*приращением функции*</u> $y=f(x)$ в точке x_0.

Так как $x-x_0=\Delta x$, то $x=x_0+\Delta x$ и $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т.е. если бесконечно малому приращению Δx соответствует б. м. приращение Δy.

Так как $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, то можно переписать $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Таким образом, получаем эквивалентное определение:

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$.

Это равенство можно переписать в виде $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$, то есть под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Приведем две важные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой же точке их сумма, произведение и частное (при $g(x_0)\neq 0$).

Доказательство. Найдем

$$\lim_{x\to \tilde{o}_0}F(x)=\lim_{x\to \tilde{o}_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to \tilde{o}_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)+g(x_0)=F(x_0)$$

$\Rightarrow$ функция $F(x)=f(x)+g(x)$ — непрерывная в точке x_0. Аналогично доказываются теоремы для произведения и частного.

Теорема 2. Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ — в точке $u_0=g(x_0)$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)=f(g(u_0))$.

Определение 4. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала $(a;b)$, то функция называется непрерывной на этом интервале.

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если она определена в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$ (или $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$).

Определение 6. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на замкнутом интервале $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$, и непрерывна справа в точке a и слева в точке b.

Рассмотрим некоторые свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Непрерывная на $[a;b]$ функция достигает на этом отрезке по крайней мере один раз наибольшего значения $\grave{I}$ и наименьшего значения $\grave{o}$, т.е. $m\le f(x)\le M$ (рис. 11).

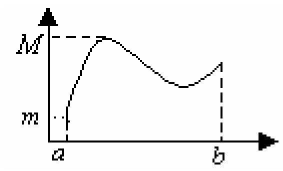

Рис. 11.

2. Непрерывная на $[a;\, b]$ функция является ограниченной на этом отрезке. Это следует из неравенства $M \le f(x) \le m \ \ \forall x \in [a;\, b]$.

Классификация точек разрыва.

Если в точке x_0 хотя бы одно из условий непрерывности нарушается, точка называется <u>*точкой разрыва*</u> данной функции.

1. Пусть существуют односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0).$$

а) Если $f(x_0-0) \ne f(x_0+0)$, но являются конечными числами. то точка x_0 называется <u>*точкой разрыва первого рода*</u> (рис. 12).

Величина $\delta = |f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ называется <u>*скачком*</u> функции $f(x)$ в точке x_0.

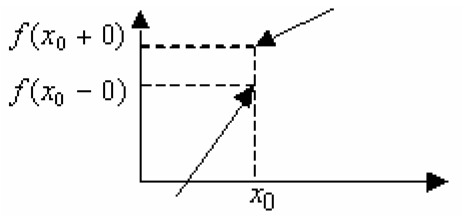

Рис. 12.

б) Если $f(x_0-0) = f(x_0+0) \ne f(x_0)$, то точка x_0 называется <u>*точкой разрыва первого рода*</u> или <u>*точкой устранимого разрыва*</u> (рис. 13).

Для того, чтобы устранить разрыв, нужно доопределить (или переопределить) функцию в самой точке x_0,

т.е. ввести новую функцию $y = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \ne x_0 \\ A, \text{ если } x = x_0. \end{cases}$

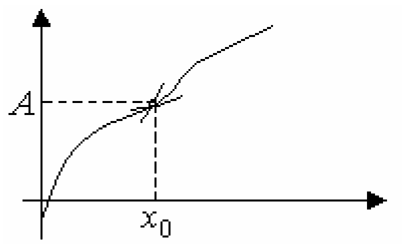

Рис. 13.

2. Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода (рис. 14).

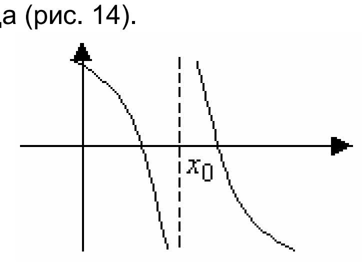

Рис. 14.

Примеры. Исследовать функции на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } 0 \le x < 3, \\ 3-x, & \text{если } 3 \le x \le 4. \end{cases}$

Изобразим график этой функции (рис. 15). В точке $\tilde{o} = 3$ у функции разрыв, так как

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0}(x-1) = 2\\ \lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0}(3-x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ разрыв I рода, скачок.}$$

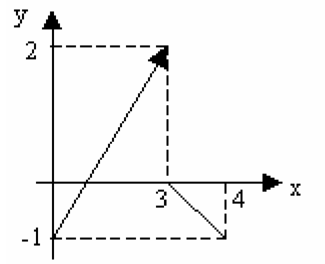

Рис. 15.

Следует отметить, что в точке $x=0$ функция непрерывна справа, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0}(x-1) = -1 = f(0)$. В точке $x=4$ функция непрерывна слева, так как $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4-0}(3-x) = -1 = f(4)$.

2) $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва, так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $f(0)$ не существует. Доопределить функцию по непрерывности — это значит задать $f(0)=1$, т.е. получим функцию вида $y = \begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x \neq 0\\ 1, & x = 0\end{cases}$.

3) $y = \sin\frac{1}{x}$.

Точка $x=0$ является точкой разрыва II-го рода, так как $\lim\limits_{x\to\pm 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует. График функции колеблется между (-1) и 1, не приближаясь ни к какому значению.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Дайте определение окрестности радиуса $h>0$ конечной точки x_0. Как обозначается такая окрестность?
2. Дайте определение h - окрестности точек $\pm\infty$. Как обозначается такая окрестность?
3. Чем отличается h - окрестность и проколотая h - окрестность конечной точки x_0?
4. Дайте определение предела функции через окрестности.
5. Как записать определение предела функции, не используя понятия окрестности?
6. В чём отличие правостороннего и левостороннего предела функции?
7. Если в некоторой окрестности точки x_0 три функции связаны неравенством $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то что можно сказать о $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?
8. Сформулируйте первый замечательный предел.
9. Какая функция называется ограниченной (неограниченной) на некотором множестве?
10. Как называется функция, для которой в точке x_0 справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$?
11. Как называется функция, для которой в точке x_0 справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$?
12. Перечислите свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.
13. Если существуют конечные пределы двух функций $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то чему равны следующие пределы: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$?

14. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то чему равны следующие пределы $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$?
15. В каком случае бесконечно малые в точке x_0 функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка; эквивалентными бесконечно малыми?
16. В каком случае бесконечно малая в точке x_0 функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка относительно бесконечно малой в точке x_0 функции $\beta(x)$?
17. Перечислите свойства эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших функций.
18. Дайте определение главной части бесконечно малой в точке x_0 функции $\beta(x)$.
19. Дайте определение главной части бесконечно большой в точке x_0 функции $V(x)$.
20. Сформулируйте второй замечательный предел.
21. Запишите таблицу эквивалентных бесконечно малых.
22. Как раскрываются показательные неопределённости?
23. Дайте определение функции, непрерывной в точке x_0.
24. Сформулируйте теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.
25. Что понимается под скачком функции $f(x)$ в точке x_0?
26. В каком случае точка разрыва функции называется точкой устранимого разрыва?
27. Каким способом можно устранить разрыв?
28. В чём отличие точек разрыва первого и второго рода?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Множества на числовой оси. Окрестности на числовой оси. Проколотая окрестность точки. Классификация точек множества. Определение предела функции в точке.
2. Односторонние пределы. Предел последовательности.
3. Основные свойства пределов (единственность предела, предельный переход в неравенстве, предел сложной функции, теорема о сжатой функции).
4. Первый замечательный предел.
5. Функция, ограниченная в некоторой окрестности. Теорема о функции, имеющей конечный предел в точке x_0. Теорема о функции, имеющей бесконечный предел. Теорема о пределе функции $\dfrac{1}{f(x)}$, если функция $f(x)$ имеет конечный предел.
6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Их свойства.
7. Теорема о пределе суммы функций, имеющих конечный предел.
8. Теорема о пределе произведения функций, имеющих конечный предел.
9. Теорема о пределе частного функций, имеющих конечный предел.
10. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций.
11. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.
12. Сравнение бесконечно больших функций. Эквивалентные бесконечно большие. Свойства эквивалентных бесконечно больших функций.
13. Главные части бесконечно малых и бесконечно больших функций.
14. Показательные неопределённости. Второй замечательный предел.
15. Функция, непрерывная в точке. Функция, непрерывная на промежутке. Теоремы о непрерывных функциях.
16. Функция, непрерывная на замкнутом интервале. Свойства функций, непрерывных на замкнутом интервале.
17. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

4. Теория пределов (14 часов)

17. Окрестности точек (конечных и бесконечных) на числовой оси. Проколотая окрестность. Предельная точка. Определение предела: на языке окрестностей и на языке ε, δ. Типовой расчёт №2.