Федеральное агентство по образованию Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Леора С.Н.

Тема 9. **Обыкновенные дифференциальные уравнения**

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2006

ББК 22.161
УДК 517.50
С.Н. Леора. Высшая математика. Тема 9. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учеб. пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2006. с. 75.
Табл. 14. Библиогр.: 8 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. В разделе «Теоретический материал» содержится также необходимый набор типовых задач с подробным разбором решения. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

С.Н. Леора

Тема 9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Н.В. Васильева

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 3 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 9 «Обыкновенные дифференциальные уравнения».
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 3 СЕМЕСТРА

N темы	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самост. работа
			Всего аудитор-ных	Из них		
				Лекции	Практ. занятия	
8	Ряды. Часть 2. Ряды Фурье.	24	14	4	10	10
9	Дифференциальные уравнения.	54	34	14	20	20
10	Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля.	66	42	18	24	24
Всего за 3 семестр		144	90	36	54	54

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

9. Обыкновенные дифференциальные уравнения. (14 часов)

3. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения (ДУ). Обыкновенные ДУ. Основные понятия: порядок уравнения, частное и общее решения, задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности частного решения для уравнения первого порядка. Геометрический смысл уравнения первого порядка и его решения. Поле направлений и изоклины. Понятие об особых точках и особых решениях ДУ
4. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными. Однородные ДУ. Линейные ДУ первого порядка, их решение методом Лагранжа. ДУ в полных дифференциалах.
5. ДУ высших порядков. Основные понятия. Формулировка теоремы существования и единственности частного решения. Уравнения, допускающие понижение порядка.
6. Линейные ДУ n-го порядка. Свойства решений линейного однородного ДУ. Линейная зависимость и независимость решений. Структура общего решения линейного однородного ДУ. Решения линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами методом Эйлера.
7. Структура общего решения линейного неоднородного ДУ. Принцип суперпозиции. Решение линейного неоднородного ДУ методом Лагранжа.
8. Решение линейного неоднородного ДУ с постоянными коэффициентами методом подбора. Физический смысл решений однородного и неоднородного ДУ (свободные и вынужденные колебания).
9. Системы дифференциальных уравнений. Нормальная форма записи системы. Решение системы сведением к одному уравнению. Линейные системы. Матричная запись. Свойства решений. Решение однородной линейной системы методом Эйлера (случай простых корней характеристического уравнения).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

9. Дифференциальные уравнения

9.1. Введение

Дифференциальные уравнения можно разделить на две большие группы. Это – обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и уравнения в частных производных.

Решением обыкновенного дифференциального уравнения является функция одного переменного, в то время как решением уравнения в частных производных является функция двух и более переменных.

Пример 1. Уравнение, описывающее свободные колебания материальной точки в среде без сопротивления является ОДУ и может быть записано в виде: $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$.

Это уравнение может быть записано так же в виде $x'' + k^2x = 0$ или $\ddot{x} + k^2x = 0$. Здесь $\frac{d^2x}{dt^2}$, x'' и $\ddot{x}$ обозначают производную второго порядка функции $x(t)$ по переменной t.

Пример 2. Уравнение, описывающее колебание струны, является уравнением в частных производных и может быть записано в виде: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Здесь $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ обозначают частные производные функции $u(t, x)$ по переменным t и x соответственно.

Далее мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

9.1.1. Задачи, приводящие к понятию обыкновенного дифференциального уравнения

К понятию обыкновенного дифференциального уравнения приводят физические и геометрические задачи.

Пример 1. Физическая задача. Найти закон движения материальной точки под действием силы тяжести.

Решение. Как известно из физики, движение материальной точки в данном случае подчиняется 2-му закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$. Таким образом, задача сводится к решению ОДУ вида:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

где g - ускорение силы тяжести, m - масса. Требуется найти закон движения материальной точки.

Перепишем уравнение в виде $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$ и проинтегрируем его дважды по t, получим закон движения материальной точки:

$$x(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Пример 2. Геометрическая задача. Найти кривую, проходящую через точку M (0;1) и обладающую таким свойством, что в любой ее точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть уравнение искомой кривой имеет вид $y = y(x)$. Условие, равенства углового коэффициента касательной удвоенной точке абсциссе касания можно записать в виде $\mathrm{tg}\,\alpha = 2x$, где α – угол наклона касательной. Тогда искомая кривая является решением дифференциального уравнения

$$y' = 2x.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общий вид искомой кривой $y(x) = x^2 + C$. Учитывая, что кривая проходит через заданную точку $M(0;1)$, найдем $C = 1$.

Таким образом, уравнение искомой кривой имеет вид $y = x^2 + 1$, это парабола, проходящая через точку M (рис. 1).

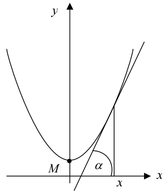

Рис.1. График искомой кривой

9.1.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - дифференцируемая функция, y' - производная этой функции по переменной x.

Определение 2. Уравнение вида

$$y' = f(x, y)$$

называется уравнением, разрешенным относительно производной или уравнением в **нормальной форме**.

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, можно записать в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Это симметричная форма записи дифференциального уравнения.

Определение 2. Функция $\varphi(x)$ называется **решением** уравнения на интервале (x_1, x_2), если она определена на этом интервале, непрерывно-дифференцируема, и подстановка этой функции в исходное уравнение обращает его в тождество для $\forall x \in (x_1, x_2)$.

График функции $\varphi(x)$ называется **интегральной кривой**.

Определение 3. Решить дифференциальное уравнение, значит, найти функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением.

В дальнейшем эту функцию будем называть искомой функцией. Процесс нахождения решения ОДУ называется **интегрированием** дифференциального уравнения.

9.1.3. Задача Коши. Особые и частные решения

Определение 1. Задача, в которой требуется найти решение дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется **задачей Коши**.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области *D* плоскости Oxy, содержащей точку (x_0, y_0). Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных x и y в области *D*;

2) $f(x, y)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ограниченную в области *D*,

тогда найдется интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Доказательство теоремы в данном курсе опускается ввиду сложности. С ним можно ознакомиться в монографии [8].

Определение 2. Функция $y = \varphi(x, C)$, где C - произвольная константа, называется **общим решением** уравнения $F(x, y, y') = 0$, если

1) она удовлетворяет уравнению $y' = f(x, y)$ при любых допустимых значениях константы C;

2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, где точка (x_0, y_0) принадлежит области, где выполняются условия

существования и единственности решения задачи Коши, можно подобрать такое значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x_0, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию, т.е. $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Определение 3. Функция $\Phi(x, y, C) = 0$ называется **общим интегралом** уравнения, если она задает общее решение уравнения в неявном виде.

Определение 4. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется **особым** решением.

Определение 5. Решение, полученное из общего при некотором допустимом значении произвольной постоянной, называется **частным** решением.

Замечание. Частное решение может быть получено из общего решения при некотором значении константы C. Особое решение не может быть получено из общего ни при каком значении произвольной постоянной C.

Пример 1. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y' = 2x$, проходящую через точку $M(1;1)$.

Решение. Общим решением уравнения является функция вида $y = x^2 + C$, где C - произвольная константа. Действительно, $y' = 2x$, отсюда $y = \int 2x dx = x^2 + C$.

Функции $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, полученные из общего решения при конкретных значениях C, являются частными решениями данного уравнения.

Построив графики решения при различных значениях C, получим бесконечное множество непересекающихся интегральных кривых, которое будем называть **семейством интегральных кривых** (рис. 2).

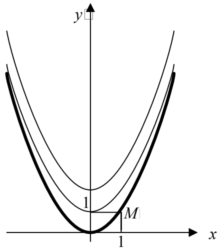

Рис. 2. Интегральные кривые уравнения

Построим интегральную кривую, проходящую через точку $M(1;1)$. Для этого требуется решить задачу Коши с начальным условием $y(1)=1$.

Подставим значения $x_0=1$, $y_0=1$ в общее решение. Полученное равенство $1=1+C$ решим относительно произвольной постоянной C, получим $C=0$. Таким образом, решением поставленной задачи Коши является функция $y=x^2$. На рис. 2 – это интегральная кривая, проходящая через точку $M(1;1)$, ее график выделен жирной линией.

Данное уравнение не имеет особых решений, так как $f(x,y)=2x$ непрерывная функция и частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ограничена.

Пример 2. Построить интегральные кривые уравнение $y'=2\sqrt{y}$.

Решение. Данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{y'}=2\sqrt{y} \text{ или } x'=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Найдем

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\left(2\sqrt{y}\right)}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

При $y = 0$ нарушается условие теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Уравнение может иметь особые решения.

Общим решение данного дифференциального уравнения является $x = \sqrt{y} + C$. Заметим, что при этом преобразовании мы могли потерять решение $y = 0$.

Частным решением уравнения являются функции $x = \sqrt{y}$ при $C = 0$, $x = \sqrt{y} + 1$ при $C = 1$ и т.д. Семейство интегральных кривых показано на рис. 3.

Рассмотрим функцию $y = 0$. Она является решением исходного уравнения, которое не может быть получено из общего ни при каких значениях произвольной постоянной. Следовательно, это особое решение, в каждой точке такого решения нарушается единственность задачи Коши.

Действительно, если задать начальное условие $y(x_0) = 0$, то поставленная задача Коши будет иметь два решения. Одно получится из общего решения. Если в формуле общего решения положить $x = x_0, y = 0$, то $C = x_0$ и решением задачи Коши является функция $x = \sqrt{y} + x_0$. Это решение проходит через точку $(x_0, 0)$. Вторым решением, проходящим через эту точку, является функция $y = 0$. Таким образом, в каждой точке решения $y = 0$ нарушается единственность задачи Коши. Такое решение является особым.

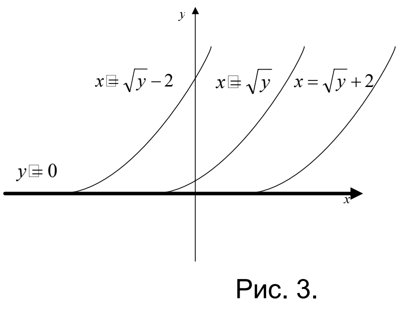

Рис. 3.

9.1.4. Метод изоклин

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y).$$

Если обозначить α угол между касательной к интегральной кривой $y = \varphi(x)$ и положительным направлением оси Ox, то, принимая во внимание, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$, $y' = f(x, y)$, получим $\operatorname{tg}\alpha = f(x,y)$.

Из этого следует, что дифференциальное уравнение в каждой точке плоскости (x, y) задает направление касательных к интегральным кривым или **поле направлений**.

Поле направлений можно построить, проводя в каждой точке (x, y) из области определения функции $f(x, y)$ отрезок (для определенности единичной длины) с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси Ox угол α, для которого $tg\,\alpha = f(x,y)$.

Если в точке (x_0, y_0) значение функции $f(x_0, y_0) = \infty$, то направление поля параллельно оси Oy. В этом случае нужно использовать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Если же в точке (x_0, y_0) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \left[\frac{0}{0}\right]$, то в этой точке поле не определено. Такую точку называют **особой**.

Поле направлений дает некоторое представление об интегральных кривых, касательные к которым в каждой точке совпадают с полем направлений. При построении поля направлений строят особые линии – изоклины.

Определение 1. Линии, на которых поле направлений постоянно, называются **изоклинами**.

Из определения изоклин следует, что их уравнение имеет вид

$$f(x, y) = C,$$

где C - любое постоянное число.

Пример 1. Построить поле направлений и изоклины дифференциального уравнения $y' = -\frac{x}{y}$. Используя построенное поле направлений, провести его интегральные кривые.

Решение. Найдем уравнение изоклин. По определению уравнение имеет вид $f(x, y) = C$. Следовательно

$$-\frac{x}{y} = C,$$

или

$$y = -Cx.$$

При $C = 1$ уравнение изоклины имеет вид $y = -x$. На этой изоклине поле направлений имеет угол наклона α, такой что $\operatorname{tg}\alpha = 1$, следовательно, $\alpha = 45^\circ$. Аналогично находим, при $C = -1$ уравнение изоклины $y = x$. На этой изоклине $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = 135^\circ$. При $C = 0$, уравнение изоклины $x = 0$, на изоклине $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\alpha = 0^\circ$. При $C = \infty$ уравнение изоклины $y = 0$, на изоклине $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, $\alpha = 90^\circ$.

Изоклины и поле направлений приведены на рис. 4. Поле направлений дает возможность установить, что интегральными кривыми являются концентрические окружности с центром в начале координат (рис. 5). В начале координат поле направлений не определено. Это особая точка.

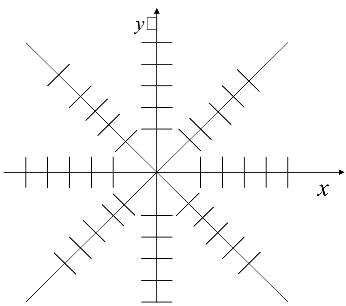

Рис. 4. Изоклины и поле направлений

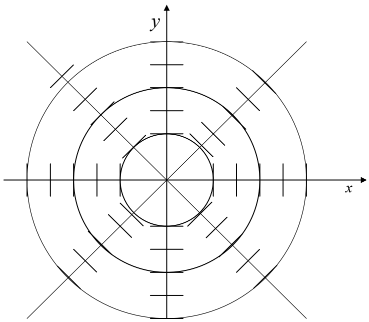

Рис. 5. Интегральные кривые

9.2. Уравнения первого порядка, допускающие интегрирование в квадратурах

Дифференциальных уравнений, общие решения или общие интегралы которых находятся элементарными приемами, немного. Далее рассмотрим некоторые из них.

9.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением с **разделяющимися переменными** называется уравнение вида:

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 .$$

Метод решения таких уравнений заключается в следующем. **Рассмотрим первое уравнение**. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, умножим уравнение на $\dfrac{dx}{g(y)}$. Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx ,$$

или

$$\frac{dy}{g(y)} - f(x)dy = 0.$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = C.$$

Вычислив интегралы, найдем решение уравнения в виде общего интеграла. Если из этого уравнения можно выразить $y(x)$ в явном виде, тогда функция $y = y(x, C)$ будет являться общим решением уравнения.

Рассмотрим второе уравнение. Умножая уравнение на $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$, получим $\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$.

Это равенство можно интегрировать, причем, первое слагаемое по x, а второе по y:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C.$$

Это выражение является общим интегралом уравнения.

Замечание. Уравнения вида $M(x)dx + N(y)dy = 0$ являются уравнения с **разделенными** переменными.

Общим интегралом такого уравнения будет выражение:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Замечание. При умножении уравнений на $\frac{dx}{g(y)}$ и $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$ мы могли потерять решения исходного уравнения вида $g(y) = 0$ для первого уравнения и $M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$ для второго уравнения. Эти решения необходимо рассмотреть отдельно. Здесь возможны три варианта. Решения, удовлетворяющие соотношениям $g(y) = 0$, $M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$:

1) могут не являться решениями исходных дифференциальных уравнений;
2) могут являться **частными** решениями исходных дифференциальных уравнений;
3) могут являться **особыми** решениями исходных дифференциальных уравнений.

Это проверяется непосредственной подстановкой решений в исходное уравнение.

Теорема. **(О существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными).**

Пусть дано дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = f(x)g(y),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ - непрерывные функции на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ и $g(y) \ne 0$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in \Pi$, решение задачи Коши существует и единственно. То есть через любую точку $(x_0, y_0) \in \Pi$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения.

Доказательство. Для данного уравнения выполнены условия теоремы существования и единственности задачи Коши, приведенной в пункте 9.1.3.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xdx + ydy = 0$.

Решение. В этом уравнении переменные разделены. Интегрируя его, $\int xdx + \int ydy = 0$, получим общий интеграл:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C .$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)ydy = 0$.

Решение. Разделяя переменные, путем деления уравнения на выражение $(1 + x^2) \cdot (1 + y^2)$, получим

$$\frac{x}{\left(1+x^2\right)}dx+\frac{y}{\left(1+y^2\right)}dy=0 .$$

Интегрируя полученное уравнение,

$$\int\frac{x}{\left(1+x^2\right)}dx+\int\frac{y}{\left(1+y^2\right)}dy=C,$$

найдем его общий интеграл $\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|=C$, или $\ln\left|1+x^2\right|+\ln\left|1+y^2\right|=2C$. Представив произвольную постоянную в виде $2C=\ln\left|C_1\right|$, получим $\ln\left|1+x^2\right|+\ln\left|1+y^2\right|=\ln\left|C_1\right|$. Отсюда $\left|1+x^2\right|\cdot\left|1+y^2\right|=\left|C_1\right|$, или $\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)=\pm C_1$.

Так как C_1 произвольная постоянная, общее решение исходного уравнения можно записать в виде:

$$\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)=C.$$

Заметим, что при делении исходного уравнения на выражение $\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)$ решения не потеряны, так как $\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)\neq 0$. Особых решений нет.

9.2.2. Однородные дифференциальные уравнения

Определение 1. Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией* n-го *порядка относительно переменных* x и y, если выполняется равенство $f(tx,ty)\equiv t^n f(x,y)$ при $t\neq 0$.

Пример 1. Функция $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ является однородной функцией второго порядка, так как

$$f(tx,ty)=t^2x^2-t^2xy+t^2y^2=t^2\left(x^2-xy+y^2\right)=t^2 f(x,y).$$

Пример 2. Функция $f(x,y)=\frac{y}{x}$ является однородной функцией нулевого порядка относительно переменных x и y.

Действительно, $f(tx,ty)=\frac{ty}{tx}=f(x,y)$.

Определение 2. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется *однородным*, если функция $f(x, y)$ однородная функция **нулевого порядка** относительно переменных x и y.

Пусть $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка относительно переменных x и y. Положив $t = \frac{1}{x}$ в тождестве $f(tx, ty) = f(x, y)$, получим $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, т. е. однородная функция нулевого порядка зависит только от отношения аргументов и ее можно представить как функцию от аргумента $\frac{y}{x}$.

Обозначая $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ через $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, однородное дифференциальное уравнение всегда можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Метод решения однородного дифференциального уравнения заключается в следующем.

Введем новую искомую функцию $u(x)$ формулой

$$u(x) = \frac{y}{x},$$

откуда $y = u \cdot x$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим: $u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$ или

$$xdu = (\varphi(u) - u)dx.$$

Таким образом, после замены мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Поделим обе части последнего равенства на $x(\varphi(u)-u)$ и проинтегрируем

$$\int \frac{1}{(\varphi(u)-u)} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Заменяя затем u на его значение $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл уравнения.

Теорема. **(О существовании и единственности задачи Коши для однородных уравнений).**

Если функция $\varphi(u)$ непрерывна на промежутке (a,b), причем $\varphi(u)\neq u$ для любого $u\in(a,b)$, тогда через любую точку (x_0, y_0), принадлежащую области G, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения.

Доказательство теоремы следует из теоремы о существовании и единственности задачи Коши для уравнений с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ можно привести к однородному уравнению, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка. Действительно, уравнение можно записать в виде:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Здесь правая часть уравнения однородная функция нулевого порядка.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+y^2)}{2xy}.$$

Сделаем замену $y=u\cdot x$, получим уравнение

$$u'x + u = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2u}.$$

Проведем ряд алгебраических преобразований:

$$u'x = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2u} - u \Rightarrow u'x = \frac{(1+u^2)}{2u} - u \Rightarrow u'x = \frac{(1+u^2)-2u^2}{2u}$$

$\Rightarrow \quad u'x = \dfrac{1-u^2}{2u}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{1}{x}dx + C.$$

Вычислив интегралы, получим решение в виде общего интеграла $\ln|x| + \ln\left|1-u^2\right| = \ln|C|$, или $x(1-u^2) = C$. Возвращаясь к исходной функции, получим

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = C$$

общий интеграл исходного уравнения.

Заметим, что по ходу решения мы делили уравнение на x и на выражение $(1-u^2)$, что могло привести к потере решений вида $1-u^2=0$ и $x=0$. Эти решения можно получить из общего интеграла при $C=0$. Следовательно, они являются частными решениями и входят в общий интеграл уравнения. Особых решений исходное уравнение не имеет.

9.2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением 1-ого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x).$$

Определение 2. Если функция $g(x) \equiv 0$, уравнение принимает вид $y' + p(x)y = 0$. В этом случае уравнение называется **однородным** линейным ОДУ. Иначе, уравнение называется **неоднородным** линейным ОДУ.

Найдем решение неоднородного уравнения методом Лагранжа. Для этого сначала решается соответствующее однородное уравнение, а затем неоднородное уравнение.

1 этап. Рассмотрим однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$, где $p(x)$ непрерывная функция. Оно является также уравнением с разделяющимися переменными. Для него выполнены условия теоремы существования и единственности задачи Коши.

Пусть $y \neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \text{ или } \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

и проинтегрируем его:

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = C.$$

Получим $\ln|y| + \ln e^{\int p(x)dx} = \ln|C|$ или $|y| = |C|e^{-\int p(x)dx}$. В силу произвольности постоянной C, **общее** решение однородного уравнения примет вид:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Заметим, что решение было получено при условиях $y \neq 0$ и $C \neq 0$. Проверим, является ли $y = 0$ решением однородного уравнения. Подставим его в уравнение. Уравнение превращается в тождество. Следовательно, $y = 0$ есть решение однородного линейного уравнения. Проверим, является оно особым или частным решением. Так как это решение может быть получено из общего решения при $C = 0$, то это решение – частное.

Особых решений уравнение не имеет. Таким образом, на первом этапе было получено общее решение однородного уравнения.

2 этап. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в том же виде, что и полученное общее решение однородного уравнения:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

$C(x)$ следует подобрать так, чтобы функция $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ являлась решением исходного неоднородного уравнения. Подставим ее в исходное неоднородное уравнение.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x).$$

Отсюда $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x)$ или $C'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx}$. Интегрируя, получим вид функции $C(x)$.

$$C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Следует заметить, что интеграл существует, так как $g(x)$ по условию теоремы является непрерывной функцией.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)$$

или

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Последняя формула дает структуру общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 1-го порядка. Оно представляет из себя сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Особых решений данное уравнение не имеет.

Замечание. Если решается задача Коши с начальными данными (x_0, y_0), то решение задается формулой

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left(\int\limits_{x_0}^{x} g(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + y_0\right).$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение. Решение будем искать методом Лагранжа.

1 этап. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y' - \frac{y}{x} = 0$.

Это уравнение является также уравнением с разделяющимися переменными. Запишем его в виде $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$ и проинтегрируем $\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = C$. Вычислив интегралы, получим

$$\ln|y| - \ln|x| = \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|C| \Rightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = |C|.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $y = Cx$.

2 этап. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y(x) = C(x) \cdot x$.

Подставляя его в исходное уравнение получим,

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 \Rightarrow C'(x)x + C(x) - C(x) = x^2 \Rightarrow$$

$$C'(x)x = x^2 \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \int x dx + C_1$$ или

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \cdot x + \frac{x^3}{2}.$$

9.2.4. Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в **полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $u(x, y)$, то есть левая часть уравнения представима в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y).$$

Теорема. Пусть задано дифференциальное уравнение, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Для того чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть заданное уравнение – уравнение в полных дифференциалах. Тогда по определению существует функция двух переменных $u(x,y)$, такая что $M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y)$.

По определению полного дифференциала

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Следовательно $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Продифференцируем выражение $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ по y, а выражение $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ по x. Получим

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

В силу непрерывности функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$, порядок дифференцирования в этих выражениях можно поменять, то есть

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Достаточность. Пусть $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Покажем, что существует функция $u(x,y)$, такая что

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y).$$

Напомним формулу полного дифференциала

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

из которой следуют следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y).$$

Рассмотрим область $G = \{(x,y): x \in (a,b), y \in (c,d)\}$. Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ по x в этой области. Получим $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx$, где $x_0 \in (a,b)$. Отсюда

$$u(x,y) - u(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx,$$

$$u(x,y) = u(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx. \quad (*)$$

Продифференцируем последнее равенство по y

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{du(x_0,y)}{dy} + \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, получим

$$N(x,y) = \frac{du(x_0,y)}{dy} + \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx.$$

В силу непрерывности функции $M(x, y)$, порядок дифференцирования и интегрирования можно поменять, $N(x, y) = \frac{du(x_0, y)}{dy} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} M(x, y)dx$.

Из условия $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{x}$ следует, что

$$N(x, y) = \frac{du(x_0, y)}{dy} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)dx.$$

Выполним ряд преобразований:

$$N(x, y) = \frac{du(x_0, y)}{dy} + N(x, y) - N(x_0, y) \Rightarrow \frac{du(x_0, y)}{dy} = N(x_0, y)$$

$$\Rightarrow \quad du(x_0, y) = N(x_0, y)dy \quad \Rightarrow \quad u(x_0, y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy,$$ где $y_0 \in (c, d)$.

Подставив $u(x_0, y)$ в выражение (*), получим

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy.$$

Таким образом, если $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$, то может быть построена функция $u(x, y)$, такая что

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y).$$

Это означает, что рассматриваемое уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Замечание. Равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = C$$

задает общий интеграл уравнения в полных дифференциалах.

Замечание. Аналогично можно показать, что равенство

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = C$$

тоже задает общий интеграл уравнения в полных дифференциалах.

Замечание. Значения x_0 и y_0 можно выбрать произвольно. Необходимо только чтобы существовали подинтегральные функции $M(x, y_0)$, $N(x_0, y)$. Если решается задача Коши, то x_0 и y_0 соответствуют начальным данным.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$\left(x^3 + y\right)dx + \left(x - y\right)dy = 0 .$$

Решение. Здесь $M(x, y) = x^3 + y$, $N(x, y) = x - y$.

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N(x, y)}{x} = 1 .$$

Уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл уравнения. Это можно сделать двумя способами. Либо воспользоваться полученными формулами, либо найти общий интеграл по алгоритму, изложенному в доказательстве теоремы.

Способ 1. Воспользуемся первой из полученных формул

$$\int_{x_0}^{x} \left(x^3 + y\right)dx + \int_{y_0}^{y} \left(x_0 - y\right)dy = C, \text{ пусть } x_0 = 0, y_0 = 0 .$$

$$\int_{0}^{x} \left(x^3 + y\right)dx + \int_{0}^{y} \left(- y\right)dy = C .$$

Вычислив интегралы, получим общий интеграл заданного уравнения

$$\frac{x^4}{4} + x \cdot y - \frac{y^2}{2} = C .$$

Способ 2. Найдем общий интеграл непосредственно $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = x^3 + y$, тогда $u = \int \left(x^3 + y\right)dx = \frac{x^4}{4} + x \cdot y + \varphi(y)$.

Продифференцируем полученное равенство по y .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + x \cdot y + \varphi(y)\right) = x + \varphi'(y).$$

Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x - y$, получим $x + \varphi'(y) = x - y$.

Интегрируя уравнение $\varphi'(y) = -y$, получим $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2}$. Отсюда

$u(x, y) = \frac{x^4}{4} + x \cdot y - \frac{y^2}{2}$.

Следовательно, общий интеграл уравнения имеет вид:

$$\frac{x^4}{4} + x \cdot y - \frac{y^2}{2} = C.$$

9.3. Дифференциальные уравнения высших порядков

9.3.1. Основные понятия

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

где x независимая переменная, $y = y(x)$ искомая функция, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ производные функции $y(x)$ по переменной x.

Определение 2. Порядок старшей производной называется **порядком** уравнения.

Например, уравнение $y^{(3)} + x \cdot y' + 2 = 0$, является обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка.

Определение 3. Уравнение вида

$$y^{(n)} = F_1\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной или уравнением в **нормальной** форме.

Определение 4. Функция $\varphi(x)$ называется решением уравнения на интервале (x_1, x_2), если она определена на этом интервале, n раз непрерывно-дифференцируема, и подстановка ее в уравнение обращает уравнение в тождество при $\forall x \in (x_1, x_2)$.

График этой функции называется **интегральной** кривой.

9.3.2. Задача Коши для уравнений высших порядков

Определение 1. Задача нахождения решения $\varphi(x)$ уравнения $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{01}$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$ называется **задачей Коши** для уравнения n-ого порядка.

Теорема существования и единственности задачи Коши.

Пусть задано уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}\right)$$

и начальные условия

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Если функция $f\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}\right)$ непрерывна в некоторой окрестности начальных условий, и непрерывны ее частные производные первого порядка по $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ в этой окрестности, то заданным начальным условиям соответствует одно определенное решение дифференциального уравнения для всех x из этой окрестности.

Определение 2. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, называется **общим решением** уравнения, если

1) она является решением, то есть удовлетворяет уравнению $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}\right)$ при любых допустимых значениях констант $C_1, \ldots, C_n$;

2) для любых начальных условий $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{01}$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$ система уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_{01} \\ .... \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_{0n-1} \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно $C_{01}, \dots, C_{0n}$. Причем функция $y = \varphi(x_0, C_{01}, C_{02}, ..., C_{0n})$ удовлетворяет начальному условию, т.е. $\varphi(x_0, C_{01}, C_{02}, ..., C_{0n}) = y_0$.

Замечание. Общее решение дифференциального уравнения n-ого порядка всегда содержит ровно n произвольных констант.

Определение 3. Решение, полученное из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, ..., C_n$, называется **частным** решением.

Определение 4. Функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ называется **общим интегралом** уравнения, если она задает общее решение уравнения в неявном виде.

9.3.3. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка.

1 тип. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение данного уравнения находится n-кратным интегрированием.

$$y = \underbrace{\int dx \int dx ... \int f(x) dx}_{n \text{ раз}} + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 ... + C_n x^{n-1}.$$

2 тип. Уравнение вида $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

Это уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой $z = y^{(k)}$. Здесь функция z рассматривается как новая неизвестная функция от x, то есть $z = z(x)$. При такой замене уравнение примет вид

$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$. Если удастся найти общее решение полученного уравнения $z = \varphi\left(x, C_1, \ldots, C_{n-k}\right)$, то общее решение исходного уравнения найдется n-кратным интегрированием уравнения

$$y^{(n)} = \varphi\left(x, C_1, \ldots, C_{n-k}\right).$$

3 тип. Уравнение вида $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

Это уравнение не содержит независимую переменную x. Порядок уравнения можно понизить на единицу, используя подстановку $y' = p$. Здесь функция p рассматривается как новая неизвестная функция от y, то есть $p = p(y)$.

Все производные $y'', \ldots, y^{(n)}$ выражаются через производные от функции p по y. Соответствующие формулы имеют вид:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dp^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

и так далее. Подставив эти выражения для производных в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-ого порядка относительно новой неизвестной функции $p(y)$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' = \sin x$.

Решение. Это уравнение относится к первому типу. Интегрируя его последовательно три раза, найдем общее решение:

$$y'' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1,$$

$$y' = \int\left(-\cos x + C_1\right)dx = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(-\sin x + C_1 x + C_2\right)dx = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Так как C_1, C_2, C_3 - произвольные константы, общее решение можно записать в виде

$$y = \cos x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 .$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $xy''' - y'' = 0$.

Решение. Это уравнение относится ко второму типу, оно не содержит искомую функцию и ее производную первого порядка. В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу заменой $z = y''$, тогда $y''' = z'$. Здесь функция z рассматривается как новая неизвестная функция от x, то есть $z = z(x)$. При такой замене получаем уравнение с разделяющимися переменными $xz' - z = 0$. Запишем его в виде

$$\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0$$

и проинтегрируем

$$\int \frac{dz}{z} - \int \frac{dx}{x} = C .$$

Вычислим интегралы, $\ln|z| - \ln|x| = C$. Представим произвольную постоянную в виде $C = \ln|C_1|$, $\ln|z| - \ln|x| = \ln|C_1|$, $\ln\left|\frac{z}{x}\right| = \ln|C_1|$,

$\left|\frac{z}{x}\right| = |C_1|$, $z = \pm C_1 x$. Так как C_1 - произвольная константа, знак $\pm$ можно опустить $z = C_1 x$. Возвращаясь к исходной функции получим $y'' = C_1 x$. Это уравнение решается путем двукратного интегрирования:

$$y' = \int C_1 x dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 ,$$

$$y = \int \left(C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \right) dx = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3 .$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши $y'' = 32\sin^3 y \cdot \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$.

Решение. Это уравнение относится к третьему типу, так как не содержит независимую переменную. Введем новую неизвестную функцию $p = p(y)$. Сделаем замену $y' = p$. Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.

Исходное уравнение приводится к виду $p\,p' = 32\sin^3 y \cdot \cos y$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде $p\,dp = 32\sin^3 y \cos y dy$ и проинтегрируем. Получим последовательно

$$\int p\,dp = \int 32\sin^3 y \cdot \cos y dy,$$

$$\int p\,dp = \int 32\sin^3 y\, d(\sin y), \quad \frac{p^2}{2} = 32\frac{\sin^4 y}{4} + C_1,$$

$$p^2 = 16\sin^4 y + C_1.$$

Воспользуемся начальными данными $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$. Получим $4^2 = 16\sin^4\dfrac{\pi}{2} + C_1$ или $16 = 16 + C_1$. Отсюда $C_1 = 0$ и, следовательно, $p^2 = 16\sin^4 y$, $p = \pm\sqrt{16\sin^4 y} = \pm 4\sin^2 y$.

Вернемся к исходной переменной $y' = \pm 4\sin^2 y$. Воспользуемся начальными данными, чтобы выбрать знак. Из начальных данных $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$, следует, что нужно выбрать положительный знак: $y' = 4\sin^2 y$. Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, запишем его в виде $\dfrac{dy}{\sin^2 y} = 4dx$ и проинтегрируем $\displaystyle\int\frac{dy}{\sin^2 y} = \int 4dx$.

Получим $-\operatorname{ctg} y = 4x + C_2$. Найдем константу, используя начальные данные: $-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2} = 4 + C_2$, $C_2 = -4$. Следовательно решение задачи Коши имеет вид $-\operatorname{ctg} y = 4x - 4$ или $x = 1 - \dfrac{\operatorname{ctg} y}{4}$.

9.4. Линейные дифференциальные уравнения n–ого порядка

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение вида

$$\alpha_0(x) y^{(n)} + \alpha_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n(x) y = f(x),$$

где $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции на промежутке $[a, b]$; $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Замечание. Если в рассматриваемой области изменения независимого переменного $\alpha_0(x) \neq 0$, то, поделив на $\alpha_0(x)$ и обозначая полученные коэффициенты и правую часть вновь $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$, $f(x)$, будем иметь

$$y^{(n)} + \alpha_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n(x) y = f(x).$$

Таким образом, не умаляя общности можно считать $\alpha_0(x) \equiv 1$.

Определение 2. Линейное дифференциальное уравнение называется **однородным**, если $f(x) \equiv 0$, в противном случае **неоднородным**.

Теорема 1. Если функции $\alpha_i(x)$, $(i = 1, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором множестве X, линейное дифференциальное уравнение всегда имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

9.4.1. Линейные однородные уравнения n–ого порядка

Определение 1. Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + \alpha_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n(x) y = 0.$$

Рассмотрим основные свойства линейных однородных дифференциальных уравнений.

Свойство 1. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение $y \equiv 0$.

Доказательство. Проверяется подстановкой $y \equiv 0$ в исходное уравнение.

Замечание. Решение $y \equiv 0$ называется **нулевым**, так как оно удовлетворяет нулевым начальным условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Других решений, удовлетворяющих нулевым начальным условиям нет.

Свойство 2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения однородного уравнения, то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 \, y_2(x)$ тоже решение этого уравнения.

Доказательство. Подставим $y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ в левую часть уравнения. Получим

$$a_0(C_1 y_1 + C_2 y_2)^{(n)} + a_1(C_1 y_1 + C_2 y_2)^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + a_n(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1\left(a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1\right) +$$
$$+ C_2\left(a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2\right).$$

Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения, то обе скобки, а значит и вся левая часть уравнения равны нулю.

Следствие. Линейная комбинация решений однородного уравнения $y = C_1 y_1(x) + C_2 \, y_2(x) + \ldots + C_n \, y_n(x)$ является решением однородного уравнения.

Определение 2. Решения уравнения $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называются **линейно независимыми** на $[a;b]$, если для $\forall x \in [a;b]$ равенство

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$.

Определение 3. Решения уравнения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на $[a;b]$, если существует набор коэффициентов $C_1, C_2, ..., C_n$, не равных нулю одновременно, такой, что

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = 0,$$

для $\forall x \in [a;b]$.

Замечание. Если среди решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ есть хотя бы одно нулевое, то они линейно зависимы.

Определение 4. Фундаментальной системой решений линейного дифференциального уравнения n-ого порядка называются n линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ этого уравнения.

Определение 4. Определитель

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируемые функции называется **определителем Вронского.**

Теорема 1. Для того, чтобы система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения была фундаментальной системой решений, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского для этих решений не обращался в ноль хотя бы в одной точке из области определения уравнения. То есть $W(x_0) \neq 0$, где x_0 - точка из области определения уравнения.

Доказательство. Необходимость. Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения, тогда функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

тоже решение уравнения по следствию из **Свойства 2**.

Поставим для этой функции нулевые начальные условия

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

в точке x_0.

Этим начальным условиям соответствует линейная однородная система относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_n^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Данная система является линейной однородной системой алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Так как решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, **…,** $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему, то они линейно независимы и система уравнений имеет только нулевое решение $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$. Из этого следует, что определитель системы отличен от нуля. Определитель этой системы является определителем Вронского, то есть $W(x_0) \neq 0$.

Достаточность. Пусть определитель системы $W(x_0) \neq 0$, тогда система имеет только нулевое решение $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, из чего следует, что решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, **…,** $y_n(x)$ **-** линейно независимы и следовательно образуют фундаментальную систему решений.

Замечание. Легко доказать, что если $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a;b]$.

Теорема 2. (О структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения).

Если $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ - фундаментальная система решений, то **общее решение** однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{o.o.}(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x),$$

где $C_1,\ldots,C_n$ - произвольные постоянные.

9.4.2. Линейные неоднородные уравнения n–ого порядка

Определение 1. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=f(x).$$

Теорема 1. Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{o.н.}=y_{o.o.}+y_{ч.н.},$$

где $y_{o.н.}$ - общее решение неоднородного уравнения, $y_{o.o.}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{ч.н.}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Доказательство. Доказательство следует из непосредственной подстановки решения $y_{o.н.}=y_{o.o.}+y_{ч.н.}$ в исходное уравнение.

Среди неоднородных линейных уравнений выделяют неоднородные линейные уравнения с **постоянными коэффициентами**, имеющие различные физические приложения. Для этих уравнений разработаны в полном объеме методы нахождения общего решения.

9.4.2. Линейные дифференциальные уравнения n–ого порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1. Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=f(x),$$

где $a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ - вещественные числа, называют неоднородным линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Левую часть линейного ОДУ с постоянными коэффициентами обычно обозначают посредством оператора $L(y)$, т.е.

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y .$$

В этих обозначениях уравнение записывается в виде

$$L(y) = f(x).$$

Общее решение неоднородного уравнения, как было указано в предыдущем пункте, имеет вид

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$$

Рассмотрим решение таких уравнений методом Эйлера. В этом случае общее решение ищется в два этапа, сначала находится общее решение однородного уравнения, а затем частное решение неоднородного уравнения.

1 этап. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

ищется в виде $y = e^{\lambda x}$. Подставляя $y = e^{\lambda x}$ в уравнение и сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, получаем так называемое **характеристическое уравнение**

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 .$$

Это уравнение, согласно основной теореме алгебры, имеет ровно n корней, с учетом кратности.

Задача нахождения корней характеристического уравнения является задачей нахождения корней многочлена с вещественными коэффициентами. Возможны следующие случаи.

- **Характеристическое уравнение имеет простые вещественные корни**.

Каждому простому вещественному корню характеристического уравнения λ_m соответствует функция, являющаяся решением линейного однородного дифференциального уравнения

$$y_m = e^{\lambda_m x}.$$

Решения, соответствующие различным вещественным корням λ_m, являются линейно независимыми. Действительно, определитель Вронского, построенный на этих решениях, не равен нулю:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

$$W = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как $e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n x} \neq 0$ и определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < k \le n} \left(\lambda_i - \lambda_k \right)$$

не равен нулю, если $\lambda_i \neq \lambda_k$.

Таким образом, n решений, соответствующих различным действительным корням характеристического уравнения, линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение однородного уравнения в данном случае имеет вид:

$$y_{o.o.} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

- **Характеристическое уравнение имеет простые комплексные корни.**

Если характеристическое уравнение имеет различные комплексные корни λ_m, то этим корням так же соответствуют линейно независимые решения $y_m = e^{\lambda_m x}$. Доказывается это аналогично первому случаю. И общее решение можно записать в виде

$$y_{o.o.} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

На практике нас интересуют вещественные решения, поэтому линейно независимые решения выбираются следующим образом. Из курса алгебры известно, что если $\lambda_m = \alpha + i\beta$ комплексный корень характеристического уравнения, то сопряженное число $\overline{\lambda}_m = \alpha - i\beta$ тоже является корнем этого характеристического уравнения. Этой паре комплексно сопряженных корней можно поставить в соответствие пару. линейно независимых вещественных функций, являющихся решениями линейного однородного дифференциального уравнения. Рассмотрим

$$y_m = e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)$$
$$y_{m+1} = e^{(\alpha-i\beta)} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Согласно **Свойству 2**. для однородного уравнения, линейная комбинация решений тоже решение этого уравнения. Положим

$$\tilde{y}_m = \left(y_m + y_{m+1}\right)/2$$
$$\tilde{y}_m = \left(y_m - y_{m+1}\right)/2i.$$

Отсюда простому комплексному корню будут соответствовать два линейно независимых решения:

$$\tilde{y}_m = e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$\tilde{y}_{m+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

- **Характеристическое уравнение имеет кратные корни**.

Если λ_m - корень характеристического уравнения кратности k, то ему соответствует k линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения, которые получаются из $y_m = e^{\lambda_m x}$ последовательным умножением его на x.

$$y_m = e^{\lambda_m x},\; y_{m+1} = y_m x,\; y_{m+2} = y_m x, \ldots, y_{m+k-1} = y_m x^{k-1}.$$

Можно показать, что эти решения линейно независимы.

Общее решение ЛОУ получается линейной комбинацией всех n полученных решений

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

2 этап. В некоторых случаях построение частного решения сводится к алгебраической задаче. Если правая часть уравнения $f(x)$ имеет вид специальный вид

$$f(x) = e^{ax}(P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx),$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ многочлены степени m и n соответственно.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.} = x^s e^{ax}(\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx).$$

Степень s показывает сколько раз среди корней характеристического уравнения встречается корень вида $\lambda_m = a + ib$, $\widetilde{P}_k(x), \widetilde{Q}_k(x)$ - многочлены степени k с неопределёнными коэффициентами, где $k = \max(m, n)$. Таким образом, частное решение имеет тот же вид, что и правая часть уравнения, только многочлены записаны с неопределенными коэффициентами. Они подбираются так, чтобы функция $y_{ч.н.}$ была решением исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $y'' - y = x^2$.

Решение.

а) Рассмотрим однородное уравнение: $y'' - y = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 1 = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = -1$, простые и вещественные.

Этим двум корням соответствуют два линейно независимых решения $y_1 = C_1 e^x$ и $y_2 = C_2 e^{-x}$, образующих фундаментальную систему решений. Общее решение однородного уравнения:

$$y_{о.о.} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

б) Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = x^2$, или

$$f(x) = e^{0\cdot x}\left(\left(1\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\right)\cos(0\cdot x) + \left(1\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\right)\sin(0\cdot x)\right).$$

Здесь отсутствуют экспонента и тригонометрические функции, поэтому $a = b = 0$, следовательно, $a + bi = 0$. Ноль не является корнем характеристического уравнения, значит $s = 0$.

Так как x^2 – многочлен второй степени, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами, то есть: $y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C$. Подставим $y_{ч.н.}$ в уравнение. Для этого найдем производные:

-1 | $y = Ax^2 + Bx + C$

0 | $y' = 2Ax + B$,

1 | $y'' = 2A$.

Подставляя значения y и y'' в исходное уравнение, получим

$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях полученного алгебраического уравнения, определим A, B и C.

x^2 : $-A = 1 \Rightarrow A = -1$;

x : $-B = 0 \Rightarrow B = 0$;

x^0 : $2A - C = 0 \Rightarrow C = -2$.

Отсюда $y_{ч.н.} = -x^2 - 2$.

Поскольку $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$, то общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y_{о.н.} = C_1 e^x + C_1 e^{-x} - x^2 - 2.$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 6y' + 9y = 18e^{-3x}$.

Решение. а) Решим однородное уравнение $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$. Оно имеет кратный корень $\lambda_{1,2} = -3$.

Этому корню соответствуют два линейно независимых решения $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = xe^{-3x}$, образующие фундаментальную систему решений. Из этого следует вид общего решения однородного уравнения:

$$y_{o.o.} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

б) Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = 18e^{-3x}$. Определим сначала значение степени s. В правой части уравнения присутствует экспонента, поэтому $a = -3$. Отсутствуют тригонометрические функции, поэтому $b = 0$. Число $a + bi = -3$ является корнем характеристического уравнения кратности 2, следовательно, $s = 2$.

Правая часть имеет вид экспоненты умноженной на многочлен нулевой степени $18e^{-3x}$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в таком же виде, взяв многочлен нулевой степени с неопределенным коэффициентом:

$$y_{ч.н.} = x^2 A e^{-3x}.$$

9 | $y = x^2 A e^{-3x}$

6 | $y' = 2xAe^{-3x} + x^2 A e^{-3x}(-3)$,

1 | $y'' = 2Ae^{-3x} - 6xAe^{-3x} - 6xAe^{-3x} + 9x^2 A e^{-3x}$

Подставим y, y' и y'' в уравнение:

$2Ae^{-3x} - 6xAe^{-3x} - 6xAe^{-3x} + 9x^2 A e^{-3x} + 12xAe^{-3x} - 18x^2 A e^{-3x} + 9x^2 A e^{-3x} = 18e^{-3x}$. Или $2Ae^{-3x} = 18e^{-3x}$

Приравнивая коэффициенты при e^{-3x}, получим $A = 9$. Тогда

$$y_{ч.н.} = 9x^2 e^{-3x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{о.н.} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 9x^2 e^{-3x}.$$

Принцип суперпозиции. Пусть правая часть неоднородного линейного уравнения представима в виде суммы

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

где $y_i(x)$ – частное решение уравнения $L(y) = f_i(x)$, тогда частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_n(x).$$

Доказательство.

Покажем, что $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_n(x)$ является решением. Подставим его исходное уравнение

$$L\,(y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_n(x)) =$$

$$= Ly_1(x) + Ly_2(x) + \ldots + Ly_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 2y' = 3\sin 2x + \cos x.$$

Решение. Общее решение этого уравнения имеет вид $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$.

а) Решая однородное уравнение $y'' + 2y' = 0$, найдем $y_{о.о.}$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Его корни $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \Rightarrow\ y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

б) Правая часть есть суперпозиция двух функций $f_1(x) = 3\sin 2x,\ f_2(x) = \cos x$. Частное решение исходного уравнения будем искать в виде: $y_{ч.н.} = y^1_{ч.н.} + y^2_{ч.н.}$

Найдем $y^1_{ч.н.}$. Рассмотрим уравнение $y'' + 2y' = 3\sin 2x$, здесь $f_1(x) = 3\sin 2x$. В этой функции отсутствует экспонента, поэтому $a = 0$. В этой функции присутствуют тригонометрическая функция $sin\,2x$, поэтому $b = 2$. Следовательно, $a + bi = 2i$. Число $2i$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 0$. Частное решение ищется в виде $y^1_{ч.н.} = A\sin 2x + B\cos 2x$.

Определим значения неопределённых коэффициентов. Вычислим производные функции $y^1_{ч.н.}$:

0 | $y = A\sin 2x + B\cos 2x$

2 | $y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

1 | $y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

Подставим значения y' и y'' в исходное уравнение $-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 4A\cos 2x - 4B\sin 2x = 3\sin 2x$.
Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в правой и левой части уравнения, получим систему для определения неопределенных коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} -4A - 4B = 3 \\ -4B + 4A = 0 \end{cases}.$$

Отсюда $A = -3/8, \mathrm{B} = -3/8$, следовательно

$$y^1_{ч.н.} = -\frac{3}{8}\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x.$$

Найдем $y^2_{ч.н.}$. Рассмотрим уравнение $y'' + 2y' = \cos x$. Здесь $f_2(x) = \cos x$. В этой функции отсутствует экспонента, поэтому $a = 0$. В этой функции присутствуют тригонометрическая функция $\cos x$, поэтому $b = 1$. Составим $a + bi = i$. Число i не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 0$.

Частное решение ищем в виде $y^2_{ч.н.} = A\sin x + B\cos x$.

Найдем неопределённые коэффициенты. Вычислим производные этой функции.

0 | $y = A\sin x + B\cos x$

2 | $y' = A\cos x - B\sin x$

1 | $y'' = -A\sin x - B\cos x$

Подставляем значения y' и y'' в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, найдем: $A = 2/5, \mathrm{B} = -1/5$.

$$y^2_{ч.н.} = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x.$$

По принципу суперпозиции

$$y_{ч.н.} = y^1_{ч.н.} + y^2_{ч.н.}$$

$$y_{ч.н.} = -\frac{3}{8}\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x.$$

Отсюда

$$y_{о.н.} = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{3}{8}\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x.$$

Пример 4. Проинтегрировать уравнение:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Решение. По тригонометрическим формулам $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, следовательно, уравнение перепишется в виде:

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^x \cos x.$$

а) Решаем однородное уравнение $y'' - 2y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, имеет два корня $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, которым соответствуют два линейно независимые решения $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$.

$$y_{о.о.} = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

б) Правая часть есть суперпозиция двух функций $f_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ и $f_2(x) = -\frac{1}{2}e^x \cos x$. Частное решение исходного уравнения имеет вид $y_{ч.н.} = y^1_{ч.н.} + y^2_{ч.н.}$

Найдем $y^1_{ч.н.}$. Рассмотрим уравнение $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^x$, здесь $f_1(x) = \frac{1}{2}e^x$. В этой функции есть экспонента, поэтому $a = 1$. В этой функции отсутствуют тригонометрическая функция, поэтому $b = 0$. Число $a + bi = 1$, не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 0$. Частное решение ищется в виде $y^1_{ч.н.} = e^x A$.

Для определения значений неопределённых коэффициентов вычислим производные этой функции.

2 | $y = e^x A$

-2 | $y' = e^x A$

1 | $y'' = e^x A$.

Подставляем значения y, y' и y'' в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим: $A = 1/2$. Следовательно:

$$y^1_{ч.н.} = \frac{1}{2} e^x .$$

Найдем $y^2_{ч.н.}$, $f_2(x) = -\dfrac{1}{2} e^x \cos x$. В этой функции присутствует экспонента, поэтому $a = 1$. В этой функции присутствуют тригонометрическая функция, поэтому $b = 2$. Число $a + bi = 1 + i$, является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 1$. Частное решение ищем в виде $y^2_{ч.н.} = xe^x (A\sin x + B\cos x)$.

Для определения значений неопределённых коэффициентов вычислим производные этой функции.

$$y' = e^x (A\sin x + B\cos x) + xe^x (A\sin x + B\cos x) +$$
$$+ xe^x (A\cos x - B\sin x).$$

$$y'' = e^x (A\sin x + B\cos x) + e^x (A\cos x - B\sin x) +$$
$$+ e^x (A\sin x + B\cos x) + xe^x (A\sin x + B\cos x) +$$
$$+ xe^x (A\cos x - B\sin x) + e^x (A\cos x - B\sin x) +$$
$$+ xe^x (A\cos x - B\sin x) + xe^x (-A\sin x - B\cos x).$$

Упростим выражение для y''

$$y'' = 2e^x(A\sin x + B\cos x) + 2e^x(A\cos x - B\sin x) +$$
$$+ 2xe^x(A\cos x - B\sin x).$$

Подставляем значения $y,\ y'$ и y'' в исходное уравнение получим: $A = 1/4, B = 0$.

$$y^2_{ч.н.} = -\frac{1}{4}xe^x\sin x.$$

$$y_{о.н.} = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}xe^x\sin x.$$

9.4.3. Уравнение движения маятника как пример линейного уравнения

Примером линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами является уравнение колебания маятника:

$$y'' + \alpha y' + ky = f(t)$$

Рассмотрим сначала случай $f(t) = 0$. В этом случае уравнение является однородным. Физически это означает, что маятник движется свободно, на него не действуют внешние (вынуждающие) силы,

$$y'' + \alpha y' + ky = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0.$$

Решая его, найдем корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k}}{2}.$$

Исследуем разные случаи.

а) $\alpha^2 - 4k > 0$. Физически это соответствует достаточно сильному трению (сопротивлению) среды. Оба корня λ_1 и λ_2 в этом случае действительны, различны и отрицательны, и им отвечают два решения $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 t}$. Общее решение имеет вид $y = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$

Рассмотрим задачу Коши с начальными данными

$$y(0) = y_0^0,\ y'(0) = y_1^0.$$

Постоянные C_1 и C_2 можно однозначно определить из начальных условий. Действительно,

$$\begin{cases} y_0^0 = C_1 + C_2 \\ y_1^0 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \end{cases}.$$

Получили линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2. Определитель этой системы отличен от нуля. Полученное таким образом решение начальной задачи

$$y = \frac{\lambda_2 y_0^0 - y_1^0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 y_0^0 - y_1^0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t},$$

не осциллируя, приближается с ростом t к решению $y = 0$.

б) $\alpha^2 - 4k < 0$. Физически это соответствует достаточно слабому трению (сопротивлению) среды. В этом случае λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными: $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ и

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{\alpha t}{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2}t + i\sin\frac{\beta}{2}t\right),\quad y_2 = \overline{y_1},\ \text{где}\ \beta = \sqrt{4k - \alpha^2}.$$

Нетрудно видеть, что $y_1 = \operatorname{Re} y_1$, $y_2 = \operatorname{Im} y_1$ также являются решениями уравнения. Действительно,

$$\left(y_1 + iy_2\right)'' + \alpha\left(y_1 + iy_2\right)' + k\left(y_1 + iy_2\right) =$$
$$= \left(y_1'' + \alpha y_1' + ky_1\right) + i\left(y_2'' + \alpha y_2' + ky_2\right) = 0$$

откуда, приравнивая нулю отдельно вещественную и мнимую части, получим требуемое утверждение.

Возьмем линейную комбинацию y_1 и y_2, получим

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\frac{-\alpha t}{2}} \cos\frac{\beta}{2}t + C_2 e^{\frac{-\alpha t}{2}} \sin\frac{\beta}{2}t.$$

Нетрудно убедиться, что, как и прежде, C_1 и C_2 однозначно определяются начальными условиями.

Решение задачи:

$$y(t) = y_0^0 e^{\frac{-\alpha t}{2}} \cos\frac{\beta}{2}t + \frac{2}{\beta}\left(y_1^0 + \frac{\alpha}{2} y_0^0\right) e^{\frac{-\alpha t}{2}} \sin\frac{\beta}{2}t$$

описывает колебательный процесс. Колебания затухают по закону $exp\left[\frac{-\alpha t}{2}\right]$. С ростом *t* это решение также стремится к положению равновесия $y = 0$.

Если α =0 (сопротивление отсутствует), то получаем периодические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k}$,

$$y = y_0^0 \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} y_1^0 \sin\omega_0 t.$$

в) $\alpha^2 - 4k = 0$. В этом случае описанный способ даёт только одно решение $y_1 = e^{\lambda t}$, где $\lambda = \frac{-\alpha}{2}$. Нетрудно, однако, непосредственно проверить, что в этом случае решением является также $y_2 = te^{\lambda t}$.

9.4.4. Метод Лагранжа для линейных неоднородных уравнений

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-ого порядка можно найти методом Лагранжа. Это метод называется также методом вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим этот метод на примере линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-ого порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Пусть известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, тогда его общее решение имеет вид $y_{o.o.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y_{o.н.} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – произвольные функции. Подставим это решение в исходное уравнение.

Найдем предварительно

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

В силу произвольности функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ выберем их так, чтобы

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0,$$

тогда

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Найдем

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставим y, y', y'' в исходное уравнение.

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) +$$
$$+ a_1(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + a_2(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = f(x)$$

Заметим, что

$$C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + a_1(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) +$$
$$+ a_2(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = 0$$

тогда $C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$.

Таким образом, производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ находятся как решения алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

Найдя выражения для производных, найдем и сами функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, следовательно, и общее решение системы.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ методом Лагранжа.

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Решение неоднородного уравнения ищется в виде:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x},\ C_1(x) = \ln\left|\cos x\right| + C_1;$$

$$C_2'(x) = 1,\ C_2(x) = x + C_2.$$

Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\cos x\right| + x\sin x.$$

9.5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение 1. Системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система уравнений, связывающая независимую переменную x, функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ и производные от этих функций:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)}\right) = 0 \end{cases}.$$

Определение 2. Сумма старших производных функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ называется **порядком** системы.

Определение 3. Если система разрешена относительно старших производных, то она называется **канонической**:

$$\begin{cases} y_1^{(k_n)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right) \\ y_2^{(k_2)} = f_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(k_n)} = f_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right) \end{cases}.$$

Определение 4. Система дифференциальных уравнений первого порядка называется **нормальной** системой:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}.$$

Задача Коши. Задача определения функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, удовлетворяющих **начальным условиям** $y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0$, где $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ - заданные числа, называется **задачей Коши** для системы уравнений.

Теорема. (Существования и единственности решения задачи Коши). Пусть функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$ непрерывны в окрестности точки M $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ и имеют в этой окрестности непрерывные частные производные $\partial f_i / \partial y_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда найдётся интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$, в котором существует единственное решение нормальной системы удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Определение 5. **Общим решением** нормальной системы называется система, состоящая из n функций:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2(x) = y_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots \\ y_n(x) = y_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases},$$

которые должны удовлетворять следующим условиям.

1. Функции $y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, ..., $y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, являются решениями системы при любых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.
2. Каковы бы ни были начальные условия, найдутся такие значения $C_1, C_2, ..., C_n$, при которых эти функции удовлетворяют системе и поставленным начальным условиям.

9.5.1. Матричная запись систем

Введем в рассмотрение **вектор-функции** $Y(x)$ и $F(x, Y)$:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ ... \\ y_n(x) \end{pmatrix} \text{ и } F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ ... \\ f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Пусть каждая из компонент $Y(x)$ имеет непрерывную производную, тогда **производная вектор-функции** $Y(x)$ есть вектор-функция, компонентами которой служат производные компонент вектор-функции $Y(x)$:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ ... \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Теперь нормальную систему можно записать в векторном виде:

$$Y'(x) = F(x, Y).$$

9.5.2. Системы линейных уравнений

Определение 1. Линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений называется система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}.$$

Определение 2. Если все функции $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1,\ldots,n$, то система дифференциальных уравнений называется линейной однородной системой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}.$$

Введем в рассмотрение матричную функцию $A(x)$ с элементами $a_{ij}(x)$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в матричном виде:

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x),$$

где, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$.

9.5.3. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Методы решения систем дифференциальных уравнений наиболее разработаны для линейных систем с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим сначала линейные **однородные** системы с постоянными коэффициентами. Матричная запись однородной системы имеет вид:

$$Y'(x) = AY(x),$$

где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

a_{ij} – константы.

Рассмотрим различные методы решения линейных систем с постоянными коэффициентами.

Метод Эйлера. Используется для нахождения общего решения линейных однородных систем. По методу Эйлера решение системы ищется в виде

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x}, \; y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}, \dots, \; y_n = \alpha_n e^{\lambda x},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda$ - постоянные числа, причем числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не равны нулю одновременно, так как наша цель построить фундаментальную систему решений, а нулевое решение не может входить в нее. В векторном виде это можно записать следующим образом:

$$Y = e^{\lambda t} R, \text{ где } R = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Подставим это решение в исходную систему

$$\lambda e^{\lambda x} R = A \cdot e^{\lambda x} R; \quad e^{\lambda x}\left(A - \lambda E\right) R = 0 .$$

Сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения α_i:

$$\begin{cases} \left(a_{11} - \lambda\right)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + \left(a_{22} - \lambda\right)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + \left(a_{nn} - \lambda\right)\alpha_n = 0 \end{cases}.$$

Или в векторном виде

$$\left(A - \lambda E\right) R = 0 ,$$

здесь E - единичная матрица.

Для того чтобы эта система имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\left|A - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением**, а корни этого уравнения, называются **собственными числами** матрицы системы A.

Задача нахождения корней характеристического уравнения сводится к задаче нахождения корней многочлена n-ой степени. Рассмотрим следующие случаи.

Пример 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны.

Решить однородную систему:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases},$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$.

Решение. Найдем общее решение системы методом Эйлера. Для данного уравнения

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$-4 - 4\lambda + \lambda + \lambda^2 + 6 = 0, \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, вещественны и различны. Каждому простому действительному корню λ_i соответствует вектор R_i и решение системы:

$$Y_i(x) = e^{\lambda_i x} \cdot R_i,$$

где

$$R_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора R_i найдутся из условия:

$$(A - \lambda_i E)R_i = 0,$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_{1i} + a_{12}\alpha_{2i} = 0 \\ a_{21}\alpha_{1i} + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_{2i} = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим первое собственное число $\lambda_1 = 2$. Компоненты вектора R_1 найдутся из системы

$$\begin{cases} -3\alpha_{11} - 2\alpha_{21} = 0 \\ 3\alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0 \end{cases}.$$

Система состоит из двух одинаковых уравнений. Таким образом, для определения двух неизвестных у нас имеется только одно уравнение, тогда одно из неизвестных можно выбрать произвольно. Пусть $\alpha_{11} = 2$, тогда $\alpha_{21} = -3$, тогда

$$Y_1 = e^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим второе собственное число $\lambda_2 = 2$. Компоненты вектора R_2 найдутся из системы

$$\begin{cases} -2\alpha_{12} - 2\alpha_{22} = 0 \\ 3\alpha_{12} + 3\alpha_{22} = 0 \end{cases}.$$

Отсюда

$$Y_2 = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}.$$

Векторы Y_1 и Y_2 линейно-независимы, так как определитель Вронского, построенный на этих решениях не равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 2e^{2x} & e^{x} \\ -3e^{2x} & -e^{x} \end{vmatrix} = -2e^{3x} + 3e^{3x} = e^{3x} \neq 0.$$

Общее решение системы имеет вид

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1\begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}.$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} \\ -C_1 3e^{2x} - C_2 e^{x} \end{cases}.$$

Пример 2. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные.

Найдите общее решение однородной системы дифференциальных уравнений, где $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3y - 2x \end{cases}.$$

Решение. Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Для нахождения вектора R_1, соответствующего корню $\lambda_1 = 2 + i$, составим систему:

$$\begin{cases} (-1-i)\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0 \\ -2\alpha_{11} + (1-i)\alpha_{21} = 0 \end{cases}.$$

Уравнения этой системы линейно зависимы, поэтому система эквивалентна первому уравнению. Придадим α_{11} любое ненулевое значение, например, $\alpha_{11} = 1$, и найдём из первого уравнения α_{21}. Получим вектор:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Так как корни характеристического уравнения комплексно сопряженные,

$$R_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$Y_1 = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = e^{(2-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

В качестве фундаментальной системы решений можно взять линейно независимые вещественные решения $\widetilde{Y}_1(t) = \operatorname{Re} Y_1(t)$, $\widetilde{Y}_2(t) = \operatorname{Im} Y_1(t)$:

$$\widetilde{Y}_1(t) = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Y}_2(t) = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение данной системы имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

или в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t \\ y(t) = (C_1 + C_2) e^{2t}\cos t + (C_2 - C_1) e^{2t}\sin t \end{cases}.$$

Пример 3. Характеристическое уравнение имеет кратные корни. Пусть λ – действительный корень характеристического уравнения кратности $p \geq 2$. Для каждого такого корня соответствующее решение системы ищем в виде

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} t + \ldots + \alpha_{1p} t^{p-1} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} t + \ldots + \alpha_{2p} t^{p-1} \\ \ldots \\ \alpha_{n1} + \alpha_{n2} t + \ldots + \alpha_{np} t^{p-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где коэффициенты α_{ij} находятся из системы алгебраических уравнений, получающейся с помощью приравнивания коэффициентов при равных степенях при подстановке вектора $Y(t)$ в исходную систему.

Найдите общее решение однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}.$$

Решение. Искомыми функциями в данном случае являются $x(t)$ и $y(t)$. Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 4$ кратности 2. Поэтому решение системы ищется в виде:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} t \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Тогда

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} e^{4t} + 4 \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} t \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} t \end{pmatrix} e^{4t}$$

Подставляя эти выражение в исходную систему и сокращая на $e^{4t} \neq 0$, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} t \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_{11} - \alpha_{21} \\ 4\alpha_{11} + 6\alpha_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_{12} - 4\alpha_{22} \\ 4\alpha_{12} + 6\alpha_{22} \end{pmatrix} t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему:

$$\begin{array}{ll} t^0: & \\ t^0: & \\ t^1: & \\ t^1: & \end{array} \begin{cases} \alpha_{12} + 2\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{22} - 4\alpha_{11} - 2\alpha_{21} = 0 \\ 2\alpha_{12} + \alpha_{22} = 0 \\ -2\alpha_{22} - 4\alpha_{12} = 0 \end{cases}.$$

Последние два уравнения в этой системе одинаковые

$$\begin{cases} \alpha_{12} + 2\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{22} - 4\alpha_{11} - 2\alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{22} = -2\alpha_{12} \\ \alpha_{22} = -2\alpha_{12} \end{cases}.$$

Подставив значение для α_{22} во второе уравнение системы, получим

$$\begin{cases} \alpha_{12} + 2\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0 \\ -2\alpha_{12} - 4\alpha_{11} - 2\alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{22} = -2\alpha_{12} \end{cases}.$$

Заметим, что первые два уравнения в этой системе одинаковые, следовательно, исходная система свелась к системе двух уравнений относительно неизвестных $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$. Таким образом два коэффициента можно выбрать произвольно. Полагая, например, $\alpha_{11} = C_1$; $\alpha_{12} = C_2$, получим из системы $\alpha_{12} = -2C_1 - C_2$, $\alpha_{22} = -2C_2$.

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -(2C_1 + C_2) - 2C_2 t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Зная фундаментальную систему решений $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ однородной системы $Y'(x) = AY(x)$, методом вариации произвольных постоянных можно найти решение неоднородной системы

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + F(x).$$

Метод вариации произвольных постоянных состоит в том, что решение системы ищется в виде

$$Y(x) = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) + \ldots + C_n(x)Y_n(x),$$

где $C_i(x)$ некоторые непрерывно – дифференцируемые функции. Подставив это решение в систему, получим

$$\begin{aligned} &C_1'(x)Y_1(x) + C_2'(x)Y_2(x) + \ldots + C_n'(x)Y_n(x) + \\ &+ C_1(x)Y_1'(x) + C_2(x)Y_2'(x) + \ldots + C_n(x)Y_n'(x) = \\ &= A \cdot C_1(x)Y_1(x) + A \cdot C_2(x)Y_2(x) + \ldots + A \cdot C_n(x)Y_n(x) + F(x) \end{aligned}.$$

Учитывая, что $Y_i'(x) = AY_i(x)$, функции $C_i'(x)$ можно найти из системы

$$C_1'(x)Y_1(x) + C_2'(x)Y_2(x) + \ldots + C_n'(x)Y_n(x) = F(x).$$

Пример 4. Решить неоднородную систему методом Лагранжа.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2e^{-x} \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 + e^{-x} \end{cases}.$$

Решение. Решим сначала соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}.$$

Ее решение было получено в Примере 1:

$$Y_0 = C_1\begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы будем искать в виде:

$$Y_1 = C_1(x)\begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix},$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ неизвестные функции. Для нахождения этих функций подставим Y_1 в неоднородную систему

$$\begin{cases} C_1'(x)2e^{2x} + C_2'(x)e^{x} = 2e^{-x} \\ C_1'(x)\left(-3e^{2x}\right) + C_2'(x)\left(-e^{x}\right) = e^{-x} \end{cases}.$$

Найдем $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. По формулам Крамера имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & e^{x} \\ -3e^{2x} & -e^{x} \end{vmatrix} = e^{3x},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2e^{-x} & e^{x} \\ e^{-x} & -e^{x} \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & 2e^{-x} \\ -3e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix} = 8e^{x}.$$

$$C_1'(x) = -3e^{-3x},\ C_1(x) = e^{-3x}.$$

$$C_2'(x) = 8e^{x}e^{-3x} = 8e^{-2x};\ C_2(x) = -4e^{-2x}.$$

$$Y_1 = e^{3x}\begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix} - 4e^{-2x}\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-x},$$

$$Y = C_1\begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ -3e^{2x} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{x} \\ -e^{x} \end{pmatrix} + e^{-x}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{x} - 2e^{-x} \\ y_2 = -3C_1e^{2x} - C_2e^{x} + e^{-x} \end{cases}.$$

Метод исключения. Некоторые линейные системы удается свести к одному линейному уравнению, порядок которого равен порядку системы. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 5. Решить линейную однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}.$$

Решение. Систему второго порядка можно свести к линейному уравнению второго порядка. Продифференцируем первое уравнение $y_1'' = -y_2'$, и подставим в него y_2' из второго уравнения. Получим дифференциальное уравнение второго порядка $y_1'' + y_1 = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 1 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$.

$$\begin{cases} y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x, \\ y_2 = y_1' = -C_1\sin x + C_2\cos x \end{cases}.$$

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения первого порядка.
2. Напишите пример дифференциального уравнения первого порядка.
3. Какой вид имеет уравнение с разделяющимися переменными.
4. Назовите условия, при которых для уравнения с разделяющимися переменными верна теорема существования и единственности задачи Коши.
5. Дайте формулировку задачи Коши для уравнения первого порядка.
6. Дайте определение изоклины.
7. Назовите необходимое и достаточное условие уравнения в полных дифференциалах.
8. Что называется фундаментальной системой решений.
9. Запишите систему ОДУ в матричном виде.
10. Как следует выбрать вид частного решения для нелинейного уравнения со специальной правой часть

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Общие определения теории ОДУ.
2. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения.
4. Теорема о существовании и единственности решения задачи
   для ДУ первого порядка.
5. Уравнения в полных дифференциалах.
6. Геометрический смысл ДУ первого порядка. Метод изоклин.
7. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка.
   Основные определения. Свойства решений.
8. Понятие линейной независимости решений
9. Неоднородные линейные уравнения.
10. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.
11. Системы ОДУ. Матричная запись.
12. Решение линейных однородных систем с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Дифференциальные уравнения (ДУ). Общее и частное решения. Задача Коши. Геометрический смысл дифференциального уравнения I порядка. Метод изоклин. Геометрические и физические задачи на составление дифференциальных уравнений. Выдача типового расчета по теме «Дифференциальные уравнения».
2. Особые точки. Особые решения. ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные ДУ. **Л. 4. 51-53, 57, 58, 106-108, 110, 112.**
3. Линейные ДУ первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах. **Л. 4. 137, 139, 141, 144, 146, 186, 188-190, 192, 193.**
4. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка. **Л. 4. 423, 430, 435, 437, 442, 444.**
5. Решение линейных однородных ДУ со специальной правой частью методом подбора. **Л. 4. 511, 515, 518, 521, 525, 532.**
6. Решение линейных неоднородных ДУ со специальной правой частью методом подбора. **Л. 4. 540-547, 549, 551, 555, 559, 585. Л. 5. 330, 335-337, 340, 346, 352.**
7. Решение линейных неоднородных ДУ методом Лагранжа. Решение систем дифференциальных уравнений сведением к однородному уравнению. **Л. 4. 575-578. Л. 5. 654, 657, 658, 660, 661.**
8. Решение линейных однородных систем ДУ методом Эйлера. **Л. 4. 786, 787, 788, 789, 790, 792, 795, 796.**
9. **Прием ТР** по теме «Дифференциальные уравнения».
10. Контрольная работа
    - ДУ уравнения 1 порядка.
    - ДУ 2 порядка, сводящееся к ДУ 1 порядка.
    - Линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
    - Линейное неоднородное ДУ, интегрируемое методом Лагранжа.

7. Тест по теме 9. «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Определите тип ОДУ $2xyy' + y^2 = 1$. Укажите номер верного ответа в таблице 2.

Таблица 2

1	2	3
С разделяющимися переменными	Линейное	В полных дифференциалах

2. Какое из ниже перечисленных уравнений является уравнением в полных дифференциалах:

1) $(1 - x^2)dy + xydx = 0$,

2) $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$,

3) $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$?

Укажите номер верного ответа в таблице 3.

Таблица 3

1	2	3
Первое	Второе	Третье

3. Найдите корни характеристического уравнения ОДУ $y'' - 9y = 0$. Укажите номер верного ответа в таблице 4.

Таблица 4

1	2	3
$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$	$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$	$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$

4. Найдите фундаментальную систему решений для уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$. Укажите номер верного ответа в таблице 5.

Таблица 5

1	2	3	4
$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$	$y_1 = e^{-x} cos\, 2x$, $y_2 = e^x cos\, 2x$	$y_1 = e^x cos\, 2x$, $y_2 = e^x sin\, 2x$	$y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{5x}$

5. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y''' + y' = \sin x + \cos x$? Укажите номер верного ответа в таблице 6.

Таблица 6

1	2	3
$y = x(A\cos x + B\sin x)$	$y = A\cos x$	$y = A\cos x + B\sin x$

6. Какая из функций является однородной функцией второго порядка относительно переменных x и y? Укажите номер верного ответа в таблице 7.

Таблица 7

1	2	3
$f(x, y) = x^2 - 2y$	$f(x, y) = x^2 - 2xy$	$f(x, y) = x^2 - xy^2$

7. Найдите общее решение уравнения $y'' = \cos x$. Укажите номер верного ответа в таблице 8.

Таблица 8

1	2	3
$y = -\cos x + C_1 x + C_2$	$y = \cos x + C_1 x + C_2$	$y = \cos x + C_1 x$

8. Найдите решение задачи Коши $xdy - 2ydx = 0$, $y(1) = 2$. Укажите номер верного ответа в таблице 9.

Таблица 9

1	2	3
$y = x^2 + C$	$y = 2x^2$	$y = 2x$

9. Найдите фундаментальную систему решений для уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$. Укажите номер верного ответа в таблице 10.

Таблица 10

1	2	3	4
$y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$	$y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$	$y_1 = 1$, $y_2 = e^{3x}$	$y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$

10. Пользуясь принципом суперпозиции, определите вид частного решения уравнения $y''' - y'' = 1 + e^{x}$. Укажите номер верного ответа в таблице 11.

Таблица 11

1	2	3
$Ax^2 + Bxe^{x}$	$Ax + (Bx + C)e^{x}$	Ae^{x}

11. Какое из ниже перечисленных уравнений является линейным уравнением первого порядка:

1) $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$

2) $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$

3) $(1 - x^2)dy + xydx = 0$?

Укажите номер верного ответа в таблице 12.

Таблица 12

1	2	3
Первое	Второе	Третье

12. Какое из ниже перечисленных уравнений не допускает понижение порядка:

1) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$,

2) $y'' = 3y^5$,

3) $xy''' = y'' - xy''$?

Укажите номер верного ответа в таблице 13.

Таблица 13

1	2	3
Первое	Второе	Третье

8. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1985.
2. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: Наука, 1972.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая школа, 1978.
4. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1992.

Дополнительная

6. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987.
7. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959.

9. ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

Таблица 14

№ задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ответ	1	3	1	3	3	2
№ задания	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	1	2	4	1	3	1