Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 7. **Интегральное исчисление функций одной переменной**

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 50

УДК 517.22.16

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева. Математика. Тема 7. Интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с.40.

Ил. 17. Табл. 27 . Библиогр.: 6 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Интегральное исчисление функций одной переменной», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. В разделе «Теоретический материал» дан набор типовых задач по изучаемой теме с подробным решением. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева

Тема 7. Интегральное исчисление функций одной переменной

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Н.Н.Катрушенко

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 2 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 7 «Интегральное исчисление функций одной переменной».
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 2–го СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план 2 семестра

№ темы	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Всего аудиторных	Из них		
				Лекции	Практические занятия	
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2.	48	28	16	12	20
6	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	38	26	12	14	12
7	Интегральное исчисление функций одной переменной.	66	44	24	20	22
8	Ряды.	38	28	20	8	10
Всего за 2 семестр		190	126	72	54	64

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

7. Интегральное исчисление функций одной переменной (24 часа)

15. Комплексные числа. Модуль, аргумент комплексного числа. Действия с комплексными числами. Показательная форма комплексного числа (2 часа).
16. Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов (2 часа).
17. Методы интегрирования: подведение под знак дифференциала, метод интегрирования по частям, метод замены переменных. Класс интегралов, «берущихся по частям» (2 часа).
18. Рациональные дроби: правильные и неправильные. Целая часть рациональной дроби. Простейшие рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей (2 часа).
19. Интегрирование иррациональных выражений. Интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная тригонометрическая подстановка (2 часа).
20. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл и свойства (2 часа).
21. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Правило Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла (2 часа).
22. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Замена переменных в определенном интеграле (2 часа).
23. Интегралы от четных и нечетных функций по симметричному промежутку. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла (2 часа).
24. Вычисление длин дуг и объемов с помощью определенного интеграла (2 часа).
25. Несобственный интеграл 1 рода. Сходящийся несобственный интеграл 1 рода. Признаки сходимости (2 часа).
26. Несобственный интеграл 2 рода. Сходящийся несобственный интеграл 2 рода. Признаки сходимости (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

1. Неопределённый интеграл

1.1. Первообразная и неопределённый интеграл

В части 4 курса высшей математики мы ввели понятие производной и научились находить производную от данной функции.

В этой главе мы будем решать обратную задачу, а именно: известна функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется *__первообразной__* для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $F'(x) = f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Аналогично можно определить понятие первообразной на отрезке $[a;b]$, но в точках a и b надо рассматривать односторонние производные.

Примеры. 1) $F(x) = \sqrt{x}$ есть первообразная для функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на $(0;\infty)$, т.к. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) Для функции $f(x) = x^2$ первообразной будет функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ на $(-\infty;+\infty)$, т.к. $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Теорема 1. Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то функция $F(x)+C$, где C – любое постоянное число, также первообразная для $f(x)$.

Доказательство. $(F(x)+C)' = F'(x)+0 = F'(x) = f(x)$.

Теорема 2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на $(a;b)$, то на промежутке $(a;b)$ $F_1(x)-F_2(x) = C$, где C – постоянная.

Доказательство.

По условию $F'_1(x) = F'_2(x) = f(x)$. Составим функцию $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и найдём ее производную $\forall x \in (a;b)$:

$$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отсюда $\Phi(x) = C$, т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Определение. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, где $C = const$, называют неопределённым интегралом от функции $f(x)$.

Обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C.$

При этом $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением,* знак $\int$ — *знаком интеграла.*

В дальнейшем будем предполагать, что функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке.

С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет собой совокупность (семейство) кривых (интегральных), каждая из которых получается путём сдвига одной из кривых параллельно самой себе вдоль оси ОУ.

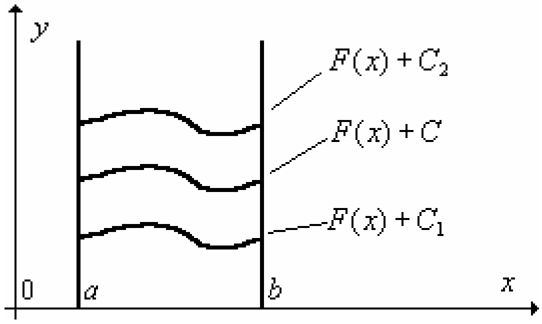

Рис. 1

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

1.2. Основные свойства неопределённого интеграла

1⁰. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \text{ и } \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Действительно, $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$

2⁰. Неопределённый интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная: $\int df(x) = f(x) + C.$

Действительно, $\int df(x) = \int f'(x)dx$. Но первообразной для $f'(x)$ является $f(x)$, поэтому $\int f'(x)dx = f(x) + C$. Тогда $\int df(x) = f(x) + C$.

3⁰. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла, т.е. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, где $A \neq 0.$

В самом деле, пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, тогда $A\cdot\int f(x)dx = A(F(x)+C) = A\cdot F(x) + C_1,$ где $C_1 = AC$ и $A\cdot F(x)$ — есть первообразная для функции $A\cdot f(x)$, т.к. $(A\cdot F(x))' = A\cdot(F(x))' = A\cdot f(x)$.

Следовательно, $\int A\cdot f(x)dx = A\cdot F(x) + C_1 = A\int f(x)dx$.

4⁰. $\int\left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Действительно,

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\text{и } \left(\int [f_1(x) + f_2(x)]dx\right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Таким образом, функции $\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ и $\int\left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx$ являются первообразными для функции $f_1(x) + f_2(x)$, т.е. отличаются на произвольную постоянную C. В этом смысле и понимается свойство 4⁰.

1.3. Таблица неопределённых интегралов

Из определения неопределенного интеграла получаем следующие формулы, справедливость которых можно проверить непосредственно дифференцированием.

Таблица 3. Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$	11.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
2.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	12.	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
3.	$\int a^x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	13.	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\| + C$
4.	$\int e^x dx = e^x + C$	14.	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a}\right\| + C$
5.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	15.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$
6.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	16.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	17. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	18. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$	19. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$	20. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Примеры.

1) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$. 2) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

ЗАМЕЧАНИЕ

В результате дифференцирования элементарных функций снова получаем элементарные функции, а операция интегрирования может привести к неэлементарным функциям. Доказано, что следующие интегралы не берутся в элементарных функциях:

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона;

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ - интегралы Френеля;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм;

$\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральные косинус, синус.

1.4. Интегрирование методом замены переменной

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причём непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной: $x = u(t)$, где $u(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = u'(t)dt$. Докажем, что в этом случае имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f(u(t)) \cdot u'(t)dt. \qquad (1)$$

Найдём производные по x от правой и левой части этого равенства:

1). $(\int f(x)dx)'_x = f(x)$.

2). Правая часть – есть сложная функция, где t - промежуточный аргумент, который является функцией от x. Тогда:

$$(\int f(u(t)) \cdot u'(t)dt)'_x = (\int f(u(t)) \cdot u'(t)dt)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = f(u(t))u'(t) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= f(u(t))u'(t) \cdot \frac{1}{u'(t)} = f(u(t)) = f(x).$$

Производные равны и равенство (1) доказано.

Примеры.

1) $\int \sin x \cdot \cos x dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

2) $\int x\sqrt{x-5}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x-5}=t \\ x=t^2+5 \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \int (t^2+5)\,t\cdot 2tdt = \frac{2t^5}{5}+\frac{10t^3}{3}+C =$

$= \frac{2\left(\sqrt{x-5}\right)^5}{5}+\frac{10\left(\sqrt{x-5}\right)^3}{3}+C$.

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то из равенства (1) следует, что если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)\cdot \underbrace{u'dt}_{du} = F(u)+C$.

Отсюда $\int f(u)du = F(u)+C$. На основании этого свойства получаем обобщенную таблицу простейших интегралов, заменяя формально x на u, где u - любая непрерывно дифференцируемая функция от независимой переменной, т. е. $u(\tilde{o})$. Так, например,

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C, \text{ где } (n\neq -1) \text{ или } \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C \text{ и т.д.}$$

Отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для дальнейшего:

1) $dx = d(x+b)$, где $b = const$;

2) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где $a\neq 0$;

3) $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$;

4) $\sin xdx = -d(\cos x)$;

5) $\cos xdx = d(\sin x)$;

6) $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$;

7) $e^x dx = d(e^x)$ и т.д.

Вообще, $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Пользуясь этими преобразованиями дифференциала, найдем следующие неопределенные интегралы.

Примеры.

1) $\int \frac{dx}{2x+3} = \int \frac{\frac{1}{2}d\left(2x+3\right)}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

2) $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \left|x^2 = u\right| = \frac{1}{2}\int \mathring{a}^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Сформулируем еще одно очень полезное правило:

если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$,

где $a\neq 0$, так как $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Пример. $\int \cos(3x+1)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$.

1.5. Интегрирование по частям

Пусть u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. На основании формулы дифференциала произведения имеем:

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$$

Интегрируя это соотношение, получим $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$, которое можно записать в виде

$$\int udv = u\cdot v - \int v\,du.$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям.*

Эта формула оказывается удобной, если интеграл $\int v \cdot du$ является табличным или легко сводится к такому.

Интегралы, берущиеся "по частям"

1. Интегралы вида $\int P_n(x) \cdot f(x)\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, $f(x)$ — одна из следующих функций: $\sin \alpha x;\ \cos \alpha x;\ e^{\alpha x};\ a^{\alpha x}$.

В качестве функции $u(x)$ следует взять многочлен $P_n(x)$ и применить к интегралу формулу интегрирования по частям n раз.

Примеры

1) $$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

2) $$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - 2\int xe^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) =$$

$$= x^2 \mathring{a}^{\tilde{o}} - 2(xe^x - e^x) + C.$$

2. Интегралы вида $\int x^n \cdot \ln^k x\,dx$, где $n \neq -1$, берутся «по частям», если за функцию $u(x)$ принять $\ln^k x$ и применить k раз к интегралу формулу интегрирования по частям.

Пример

$$\int \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x & du = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2\int x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) =$$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - x\right) + C.$$

3. Интегралы вида $\int x^n \cdot f(x)\,dx$, где $f(x)$ — одна из следующих функций: $\arcsin^k \alpha x;\ \arccos^k \alpha x;\ \mathrm{arctg}^k\, \alpha x;\ \mathrm{arcctg}^k\, \alpha x$, также берутся "по частям", причем за функцию $u(x)$ выбирают $f(x)$.

4. В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному применяется формула интегрирования по частям и искомый интеграл определяется из получившегося алгебраического уравнения. К таким интегралам относятся следующие интегралы: $\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx$, $\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx$ и $\int \sqrt{x^2 \pm a}\, dx$.

Пример.

$$\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{x^2 + a} & du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{\left(x^2 + a\right) - a}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}} dx + a\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C\,.$$

Сравнивая начало и конец равенства, получим уравнение

$$2\int \sqrt{x^2+à}\,dx = x\sqrt{x^2+à} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+à}\right| + C\,,$$ откуда

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C\,.$$

1.6. Интегрирование простейших рациональных дробей

Дробно-рациональная функция или <u>*рациональная дробь*</u> — это дробь вида

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n}\,.$$

Не ограничивая общность рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней, т.е. дробь сокращена.

Если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$, то дробь называют <u>*правильной*</u>, в противном случае дробь называют <u>*неправильной*</u>.

Определение. Правильные рациональные дроби вида:

1. $\dfrac{A}{x-a}$,
2. $\dfrac{B}{(x-b)^k}$ $\quad (k \in Z_+)$,
3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (дискриминант $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$),
4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($D < 0$ и k - целое положительное число).

называют *простейшими дробями* 1, 2, 3, 4 типов.

Найдем интегралы от этих дробей:

1. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\cdot\ln|x-a| + C\,.$$

2. $$\int \frac{B}{(x-b)^k}dx = A\int (x-b)^{-k}dx = A\frac{(x-b)^{-k+1}}{-k+1} + C\,.$$

3. $$\int \frac{Mõ+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + (N - \frac{Mp}{2})}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + (N - \frac{Mp}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C\,.$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей типа 4.

4. $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + (N - \frac{Mp}{2})}{(x^2+px+q)^m}dx =$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^m}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^m}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^m}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array}\right|=\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}(1-m)}+(N-\frac{Mp}{2})\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}_{I_m}.$$

Рассмотрим интеграл I_m и получим для него <u>*рекуррентную формулу*</u>, т.е. формулу позволяющую вычислить интеграл I_m, если мы знаем интеграл I_{m-1}.

Для этого рассмотрим $I_{m-1}=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}=$

Применим к нему формулу интегрирования по частям:

$$=\left|\begin{array}{ll} u=\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} & du=-(m-1)\cdot(t^2+a^2)^{-m}\cdot 2t\,dt \\ d\,v=dt & v=t \end{array}\right|=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}+2(m-1)\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}+2(m-1)\int\frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}+2(m-1)\left(\underbrace{\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}dt}_{I_{m-1}}-a^2\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}_{I_m}\right)$$

Таким образом, получили:

$$I_{m-1}=\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}}+2(m-1)I_{m-1}-2(m-1)a^2I_m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_m=\frac{t}{2(m-1)a^2(t^2+a^2)^{m-1}}+\frac{2(m-1)-1}{2(m-1)a^2}I_{m-1}$$

Пример. $\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{t}{2\cdot1\cdot1(t^2+1)}+\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1\cdot1}\cdot I_1=$

$$=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t^2+1)}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

1.7. Интегрирование рациональных дробей

Теорема 1.

Если $Q_m(x)=(x-a)\ldots(x-b)^k\ldots(x^2+p_1x+q_1)\cdot\ldots\cdot(x^2+p_2x+q_2)^m$, где $(x^2+p_1x+q_1)$ и $(x^2+p_2x+q_2)$ не имеют вещественных корней, то правильная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-a}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\ldots+$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_2x+q_2)}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+p_2x+q_2)^m}.$$

Т.е. правильная рациональная дробь представляется в виде суммы простейших дробей, которые интегрируются в элементарных функциях.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Подобное представление правильной рациональной дроби в виде суммы простейших рациональных дробей называют разложением ее на простейшие. При этом числа $A, B_1, B_2,...B_k, C,...$ и.т.д. называют неопределенными коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие единственно.

Пример. Разложите правильную рациональную дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$ на простейшие.

Решение. Поскольку заданная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей: $\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}$, то нашей задачей является подобрать неопределенные коэффициенты A, B_1, B_2 так, чтобы это равенство выполнялось тождественно.

Умножив обе части равенства на наименьший общий знаменатель всех дробей, получим:

$$x^2+2=A(x^2+2x+1)+B_1(x^2-x-2)+B_2(x-2).$$

Это равенство двух многочленов должно выполняться при всех значениях переменной x, а значит должны быть равны их коэффициенты при одинаковых степенях.

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1=A+B_1 \\ x^1 & 0=2A-B_1+B_2 \\ x^0 & 2=A-2B_1-2B_2 \end{array}.$$

Из этой системы можно найти неопределенные коэффициенты A, B_1, B_2.

Неопределенные коэффициенты A, B_1, B_2 можно найти и по-другому. Можно подставить любые значения x в правую и левую части равенства и получить систему алгебраических уравнений относительно A, B_1, B_2. Ясно, что таких значений x должно быть выбрано столько, сколько неопределенных коэффициентов входит в разложение дроби. Следует заметить, что самыми удобными для подстановки значениями переменной x являются корни знаменателя заданной рациональной дроби.

$$\begin{array}{c|c} x=-1 & 3=-3B_2 \\ x=2 & 6=9A \\ x=0 & 2=A-2B_1-2B_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B_1=\frac{1}{3} \\ B_2=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Теорема 2. Неправильную рациональную дробь всегда можно представить в виде суммы рационального выражения (многочлена) и правильной рациональной дроби, то есть рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $n \geq m$ представима в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M(x)+\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } k<m.$$

Такое представление неправильной рациональной дроби называется *выделением целой части.*

Пусть требуется вычислить интеграл $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$. Если подынтегральная дробь неправильная, то мы представим её в виде суммы многочлена $M(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{T_k(x)}{Q_n(x)}$, которая в свою очередь представима в виде суммы простейших дробей.

Таким образом, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей.

Пример. $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$

$$= \tfrac{2}{3}\ln|x-2| + \tfrac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

1.8. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

1. Если подынтегральное выражение содержит лишь *линейную иррациональность* $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$, то полезна подстановка $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

Пример. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x+1} \\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2dt \end{array} \right| = 3\int \frac{(t^3-1)t^2dt}{t} =$

$$= 3\int (t^4 - t)dt = 3\frac{t^5}{5} - 3\frac{t^2}{2} + C = \tfrac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - \tfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

2. В интегралах вида $\int R\left(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[k_m]{ax+b}\right)dx$ надо сделать подстановку $ax+b = t^n$, где $n = \text{НОК}(k_1, k_2, \ldots k_m)$.

3. Интеграл от простейшей *квадратичной иррациональности* $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью выделения в квадратном трёхчлене ax^2+bx+c полного квадрата сводится к одному из двух интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm x^2}}$, которые являются табличными.

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+4}} =$

$$= |x-3=t| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+4}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right| + C.$$

4. Интегралы вида

$$\int R(x^{2n}, \sqrt{a^2-x^2})dx,$$
$$\int R(x^{2n}, \sqrt{a^2+x^2})dx,$$
$$\int R(x^{2n}, \sqrt{x^2-a^2})dx,$$

где через $R(x)$ обозначена рациональная функция, интегрируются с помощью следующих тригонометрических подстановок:

$$\int R(x^{2n},\sqrt{a^2-x^2})dx=\left|\begin{array}{c} x=a\cos t\ (a\sin t)\\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}=a\sin t\\ dx=-a\sin t\,dt\end{array}\right|;$$

$$\int R(x^{2n},\sqrt{a^2+x^2})dx=\left|\begin{array}{c} x=a\,\mathrm{tg}\,t\ (a\,\mathrm{ctg}\,t)\\ \sqrt{a^2+x^2}=a\cdot\dfrac{1}{\cos t}\\ dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt\end{array}\right|;$$

$$\int R(x^{2n},\sqrt{x^2-a^2})dx=\left|\begin{array}{c} x=a\,\mathrm{ch}\,t\ (a\,\mathrm{sh}\,t)\\ \sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}=a\,\mathrm{sh}\,t\\ dx=a\,\mathrm{sh}\,t\,dt\end{array}\right|.$$

Пример. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\left|\begin{array}{c} x=a\cos t\\ \sqrt{a^2-x^2}=a\sin t\\ dx=-a\sin t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{-a\sin t\,dt}{a^3\sin^3 t}=$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{a^2}\mathrm{ctg}\,t+C=\left|t=\arccos\frac{x}{a}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}\mathrm{ctg}\arccos\frac{x}{a}+C=\frac{1}{a^2}\frac{\cos\arccos\frac{x}{a}}{\sin\arccos\frac{x}{a}}+C=$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{x}{a}}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Для интегралов вида $\int R(x^{2n+1},\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x^{2n+1},\sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x^{2n+1},\sqrt{x^2-a^2})\,dx$ также можно использовать тригонометрические подстановки. Однако проще их вычислять, делая замену $a^2\pm x^2=t^2$ или $x^2-a^2=t^2$.

1.9. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(\sin x,\cos x)$ — рациональная функция своих аргументов.

Сделаем подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда:

$$x=2\,\mathrm{arctg}\,t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}.\ \sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Таким образом, сделав подстановку, исходный интеграл от тригонометрических функций стал интегралом от рациональной функции переменной t, т.е.

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t & x = 2\operatorname{arctg} t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C .$$

Рассмотренная подстановка даёт возможность проинтегрировать любую функцию вида $R(\sin x, \cos x)$. Поэтому такую подстановку называют *универсальной тригонометрической подстановкой*. Однако на практике она часто приводит к сложным интегралам от рациональных функций. Поэтому полезно знать также другие подстановки.

1. $\int R(\sin x)\cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int R(t) dt .$

Пример.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{1+\cos x} = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{1-t^2}{1+t} dt =$$

$$= \int (t-1)\, dt = \frac{t^2}{2} - t + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C .$$

2. $\int R(\operatorname{tg} x) dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int R(t) \cdot \frac{dt}{1+t^2} .$

3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $\sin x$ и $\cos x$ входят в чётных степенях. В таких интегралах применяется подстановка:

$$\left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| .$$

4. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$, где n - нечётное, m - любое.

Пусть $n = 2p+1$, тогда

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x dx = \int R(\sin x)\cos x dx .$$

Получили случай 1.

5. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m, n - чётные неотрицательные.

В этом случае используем формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ и } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) .$$

Пример.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + C .$$

6. $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx;\ \int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx;\ \int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx,$

где $(\alpha \neq \beta)$ берутся при помощи следующих формул:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x);$$
$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x);$$
$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x).$$

7. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$ или $\int \operatorname{ctg}^m x dx$, где $\grave{o} \geq 2$ - целое число, сводятся к табличным интегралам, если к подынтегральной функции прибавить и отнять $\operatorname{tg}^{m-2} x$ или $\operatorname{ctg}^{m-2} x$.

Пример. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \left(\left(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x\right) - \operatorname{tg}^2 x\right)dx = \int \operatorname{tg}^2 x\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)dx -$

$$-\int \left(\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) - 1\right)dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx =$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \cdot d\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + x = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

В интегралах вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$ при четных отрицательных m и n иногда удобно использовать тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x}dx =$

$$= \int \frac{1}{\cos^4 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,d\operatorname{tg} x + 4\int \frac{1}{\sin^2 2x}dx =$$

$$= \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)d\operatorname{tg} x + 2\int \frac{1}{\sin^2 2x}d(2x) = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\operatorname{ctg} 2x + C.$$

2. Определенный интеграл

2.1. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ (рис. 1). Разделим $[a;b]$ на части произвольными точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

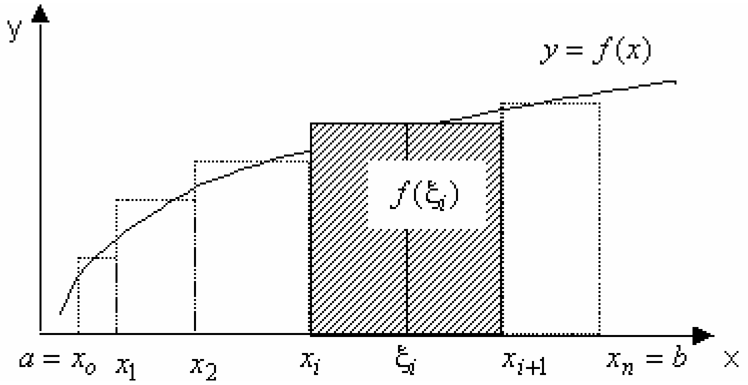

Рис. 1.

На каждом частичном отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ разбиения выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. В каждой точке ξ_i вычислим значение функции $f(\xi_i)$.

Составим сумму $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, которую будем называть <u>*интегральной суммой*</u> функции f , соответствующей этому разбиению.

Обозначим через $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$ максимальную длину частичных отрезков $[x_i; x_{i+1}]$.

Определение. Пусть $f(x)$ непрерывная функция на $[a;b]$. Если существует предел последовательности интегральных сумм S_n при $\lambda \to 0$ (и $n \to \infty$), независящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и от выбора точек ξ_i , то он называется <u>*определенным интегралом от функции*</u> $f(x)$ <u>*на отрезке*</u> $[a;b]$. Функция $f(x)$ называется при этом <u>*интегрируемой на*</u> $[a;b]$.

Обозначается: $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} S_n = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$,

где a - называется нижним пределом интегрирования; а b - верхним пределом интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b]$. Произведение $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ численно равно площади прямоугольника, имеющего основание $[x_i; x_{i+1}]$ и высоту $f(\xi_i)$.

Построив на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ такой прямоугольник, получим ступенчатую фигуру, площадь которой равна интегральной сумме $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Если $\lambda \to 0$, то площадь ступенчатой фигуры будет стремиться к площади так называемой криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox (рис. 2).

Таким образом $\int\limits_a^b f(x)dx = S$.

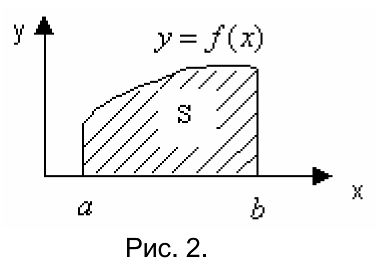

Рис. 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Понятие определенного интеграла так, как мы его определили, было введено для непрерывных функций французским математиком Коши. Говорят, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируема на нем в смысле Коши.

В общем случае – для функций не обязательно непрерывных – может существовать предел интегральных сумм, тогда говорят, что функция интегрируема в смысле Римана. Это определение дано немецким математиком Б. Ф. Риманом (1826-1866гг.).

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Можно доказать, что функция является интегрируемой отрезке $[a;b]$, если этот отрезок модно разбить на конечное число отрезков, на которых данная функция непрерывна.

2.2. Основные свойства определенного интеграла

1⁰. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е. $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx$, $A = \text{const}$, если эти интегралы существуют.

Действительно, $\int\limits_a^b Af(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} Af(\xi_i)\cdot\Delta x_i =$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} A\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = A \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx.$$

2⁰. Определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов от слагаемых, т.е.

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - интегрируемые на $[a;b]$ функции.

Так как $\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i))\cdot\Delta x_i =$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

3⁰. Если на отрезке $[a;b]$, где $a<b$, интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Рассмотрим разность $\int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b (g(x)-f(x))dx$.

Так как $g(x)-f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;\, b]$, то, по геометрическому смыслу определенного интеграла, $\int\limits_a^b (g(x)-f(x))dx \ge 0 \;\Rightarrow\; \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

4⁰. Если m и M - наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a \le b$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Доказательство. По условию $m \le f(x) \le M$, тогда $\int\limits_a^b mdx \le \int\limits_a^b Mdx$. Но $\int\limits_a^b mdx = m\int\limits_a^b dx = m \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = m(b-a)$. Аналогично, $\int\limits_a^b Mdx = M(b-a)$.

Тогда $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ и теорема доказана.

Доказанное свойство определенного интеграла имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Если $f(x) \ge 0$, то $S_{aA_1B_1b} \le S_{aABb} \le S_{aA_2B_2b}$ (рис. 3).

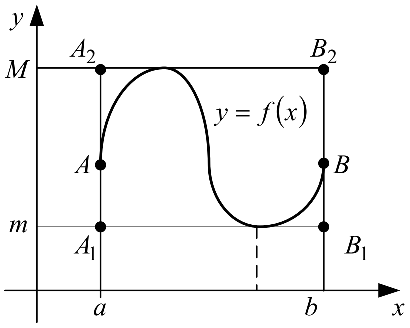

Рис. 3

5⁰. Теорема о среднем. Если $f(x)$ - непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $\xi \in [a;b]$ такая, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Доказательство. Пусть для определенности $a < b$. Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ ограничена на нем. Пусть $m \le f(x) \le M$. Тогда

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Разделив это равенство на $(b-a)$, получим $m \le \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M$. Если обозначить

$\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \mu$, то $m \le \mu \le M$.

Так как $f(x)$ - непрерывна, то она принимает все значения, заключенные между числами m и M. Следовательно, $\exists \xi \in [a;b]$, такое, что $f(\xi) = \mu$, т.е. $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. Из последнего равенства следует $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$, где $\xi \in [a;b]$.

6⁰. Из определения определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

7⁰. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, если только все три интеграла существуют.

Доказательство.

Разобьем $[a;b]$ на части так, чтобы точка c была точкой деления. Затем, разобьем интегральную сумму $\sum\limits_a^b$, соответствующую отрезку $[a;b]$, на две суммы: $\sum\limits_a^c$ - сумму, соответствующую $[a;c]$ и $\sum\limits_c^b$ - сумму, соответствующую $[c;b]$. Тогда

$$\sum_a^b f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\cdot\Delta x_i .$$

Переходя к пределу при $\max\Delta x_i \to 0$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Если же, например, $a < b < c$, то на основании доказанного свойства определенного интеграла справедливо равенство: $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx \Rightarrow$

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx$. Тогда по свойству 6^0:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Аналогично доказывается это свойство при другом расположении точек a,b,c.

2.3. Определенный интеграл, как функция верхнего предела. Теорема Барроу

Пусть $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$, где $t \in [a;x] \subset [a;b]$ (во избежание путаницы, переменная интегрирования обозначена другой буквой).

При постоянном a этот интеграл будет представлять собой функцию верхнего предела x. Эту функцию мы обозначим через $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Если $f(x) \ge 0$, то величина $\Phi(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$ (рис. 4). Очевидно, что эта площадь изменяется в зависимости от x.

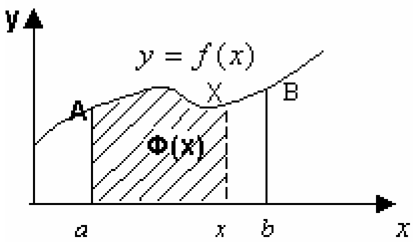

Рис. 4.

Теорема Барроу. Если $f(x)$ - непрерывная функция и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, то $\Phi(x)$ дифференцируемая функция и ее производная равна

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Доказательство. Дадим x приращение Δx, тогда

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Найдем приращение $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Таким образом $\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Применим к этому интегралу теорему о среднем (рис.5):

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \text{ где } \xi \in [x; x+\Delta x]$$

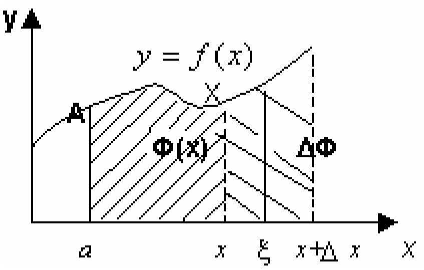

Рис. 5

Найдем $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi)$. Так как $\xi \to x$ при $\Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$ вследствие непрерывности. Следовательно, $\Phi'(x) = f(x)$.

2.4. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

которая называется *формулой Ньютона – Лейбница.*

Доказательство. Пусть $y = F(x)$ - первообразная для $f(x)$. Но $\int_a^x f(t)dt$ - тоже первообразная для $f(x)$, так как $\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$. Эти первообразные отличаются на произвольную постоянную, т.е. $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$.

Положим в этом равенстве $x=a$, тогда $\int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+C$. Поскольку $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$, то $0=F(a)+C \Rightarrow C=-F(a)$. Тогда $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$.

Положим в последнем равенстве $x=b$, получим $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$ или, заменив обозначение переменной интегрирования на x, $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

ЗМЕЧАНИЕ

Для разности значений первообразной обычно применяют обозначение: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

Пример: $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\limits_0^1 \frac{d(x^2+1)}{2\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}-1$.

2.5. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$. Введем новую переменную t по формуле $x=\varphi(t)$.

Если:

1) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$;
2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ - непрерывны на $[\alpha;\beta]$;
3) $f(\varphi(t))$ - определена и непрерывна на $[\alpha;\beta]$;

то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Рассмотрим сложную функцию $F(\varphi(t))$. Найдем ее производную

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Значит $F(\varphi(t))$- первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пример.

$$\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \left|\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=t\\ x=t^2-1\\ dx=2tdt\\ x=0\Rightarrow t=1\\ x=3\Rightarrow t=2\end{array}\right| = \int\limits_1^2 (t^2-1)t2tdt = 2\int\limits_1^2 (t^4-t^2)dt =$$

$$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right) = 7\frac{11}{15}.$$

ЗАМЕЧАНИЯ

1). Если $f(x)$ - четная функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Действительно, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$. Сделаем подстановку в первом интеграле $\left| \begin{array}{l} x=-t \\ x=-a \Rightarrow t=a \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{array} \right|$. Тогда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = -\int\limits_{a}^{0} f(t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = |t=x| = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Следовательно, $\int\limits_{-a}^{a} f(t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

2). Если $f(x)$ - нечетная, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Действительно,

$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$ (подстановка $\left| \begin{array}{l} x=-t \\ x=-a \Rightarrow t=a \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{array} \right|$ в первом интеграле) $= -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = \int\limits_{a}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = \int\limits_{a}^{a} f(t)dt = 0$.

2.6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда $(u\cdot v)' = u'v + uv'$. Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int\limits_{a}^{b} (u\cdot v)' dx = \int\limits_{a}^{b} u'vdx + \int\limits_{a}^{b} uv'dx = \int\limits_{a}^{b} vdu + \int\limits_{a}^{b} udv,$$

так как $\int (uv)' dx = uv + C$, то $\int\limits_{a}^{b} (uv)' dx = (uv)\Big|_a^b$. Получили формулу

$$\int\limits_{a}^{b} udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} vdu,$$

которая называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример.

$$\int\limits_{0}^{2\pi} x\cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} u=x \\ dv=\cos xdx \\ du=dx \\ v=\sin x \end{array} \right| = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0 + \cos x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

2.7. Геометрические приложения определенного интеграла

- ***Вычисление площадей***

1. Если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 6), равна: $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

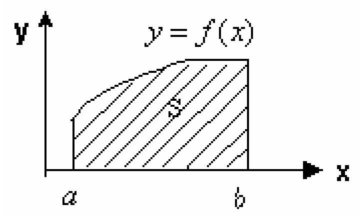

Рис. 6

2. Если $f(x) \leq 0$ на $[a;b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$ и по абсолютной величине равен площади соответствующей криволинейной трапеции S (рис. 7), т.е. $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

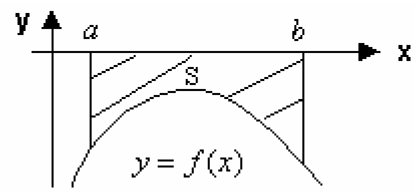

Рис. 7

3. Если $f(x)$ конечное число раз меняет свой знак на отрезке $[a;b]$, то интеграл по всему отрезку $[a;b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам (рис. 8), или $S = \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

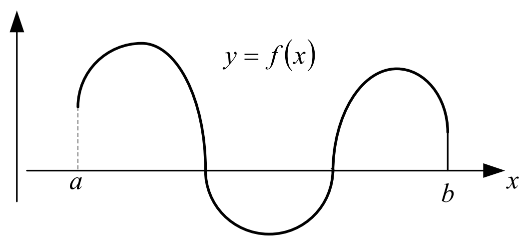

Рис. 8.

Пример. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, на промежутке $x \in [0;\ 2\pi]$ (рис. 9).

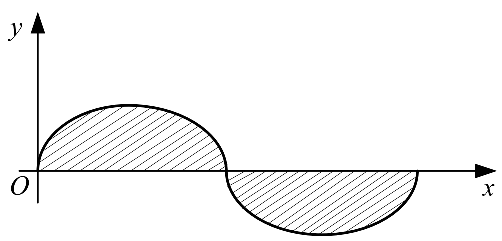

Рис. 9.

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right|=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\left|(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right|=2+|-2|=4\text{, или}$$

$$S=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=4.$$

4. Если кривая задана уравнениями *в параметрической форме* (рис.10): $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, где $\alpha\le t\le\beta$ и $\varphi(\alpha)=a;\quad \varphi(\beta)=b$.

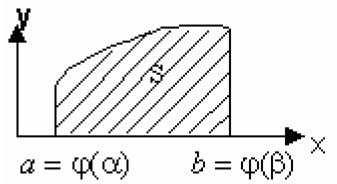

Рис. 10

Тогда площадь криволинейной трапеции вычисляется через определенный интеграл, в котором следует провести замену переменных.

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx=\left|\begin{array}{l}y=\psi(t)\\ x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\\ x=a;\ t=\alpha\\ x=b;\ t=\beta\end{array}\right|=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

$$\Rightarrow\boxed{S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt.}$$

5. Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, и если требуется вычислить площадь сектора, соответствующего центральному углу $\alpha\le\varphi\le\beta$, то можно получить формулу для площади этого сектора.

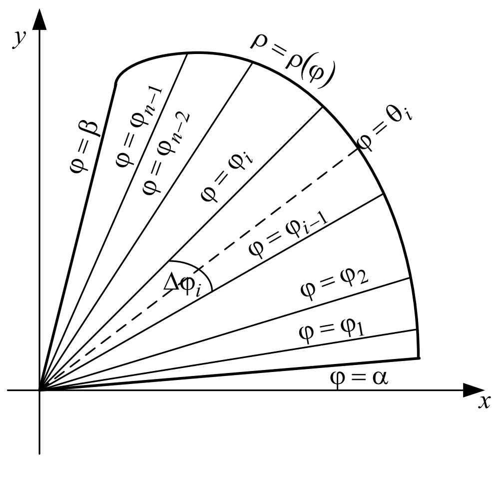

Рис. 11

Разобьем площадь криволинейного сектора на n частей лучами: $\varphi_0=\alpha,\varphi_1,\varphi_2,....,\varphi_{i-1},\varphi_i,...,\varphi_n=\beta$ (рис. 11). В каждом частном угле $\Delta\varphi_i$ возьмем луч θ_i и найдем $\rho(\theta_i)$. Тогда площадь криволинейного сектора с углом $\Delta\varphi_i$ будет равна $\Delta S_i=\frac{1}{2}(\rho(\theta_i))^2\Delta\varphi_i$. Следовательно, площадь всего «ступенчатого» сектора будет равна $S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\rho(\theta_i)\right)^2 \Delta\varphi_i$. Получили интегральную сумму S_n . Переходя к пределу при $\max\limits_{(n\to\infty)} \Delta\varphi_i \to 0$, получим $S_n \to S$. Таким образом площадь сектора равна

$$\boxed{S_{сектора} = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (рис. 12).

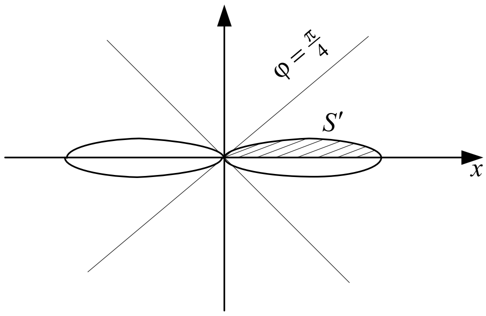

Рис. 12

$$S = 4S' = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} == 2a^2\frac{1}{2}(1-0) = a^2.$$

- ***Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений***

Пусть T - некоторое тело, расположенное вдоль оси Ox . Предположим, что для любого $x \in (a; b)$ известна $S = S(x)$ — площадь любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox (рис. 13).

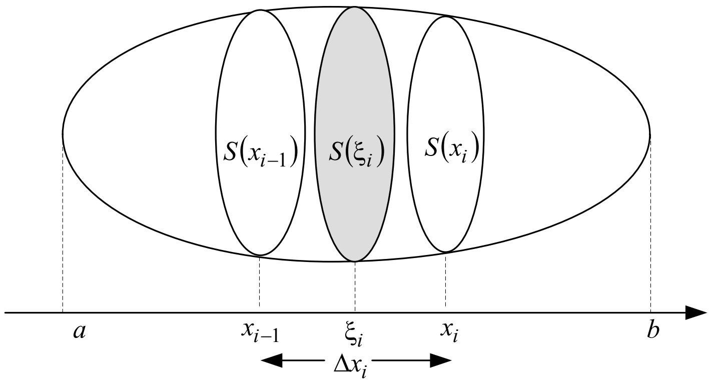

Рис. 13.

Предположим, что $S(x)$ есть непрерывная функция от x . Проведем плоскости $x = a, x = x_1, ..., x = x_n = b$. Эти плоскости разобьют тело T на n слоев.

В каждом частичном промежутке $\left[x_{i-1}; x_i\right]$ возьмем произвольную точку $\xi_i \in \left[x_{i-1}; x_i\right]$ и построим цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси Ox , а направляющая представляет собой контур сечения тела T плоскостью $x = \xi_i$.

Объем такого цилиндра равен $S(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, где $S(\xi_i)$ - площадь поперечного сечения цилиндра, Δx_i - его высота. Сумма объемов всех цилиндров равна $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$.

V_n представляет собой интегральную сумму для непрерывной функции $S(x)$ на отрезке $[a;b]$. Следовательно, существует конечный предел этой интегральной суммы, который по определению равен определенному интегралу.

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx.}$$

- ***Объем тела вращения***

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox непрерывной на $[a;b]$ кривой $y = f(x)$ и ограниченное плоскостями $x = a$ и $x = b$. Такое тело называется телом вращения (рис. 14).

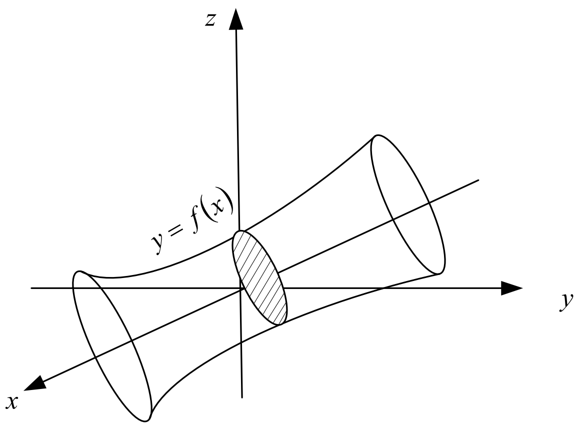

Рис. 14

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть круг, площадь которого равна: $S = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$. Тогда объем тела вращения равен

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx \;\Rightarrow\; \boxed{V = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx}.$$

- ***Длина дуги в декартовых координатах***

Определение. Под *длиной дуги* AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной возрастает непрерывно, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

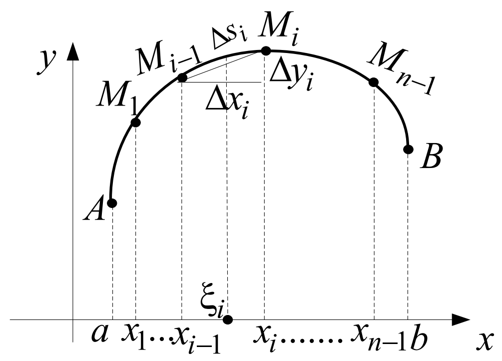

Рис. 15.

То есть, если длина ломаной равна $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$, то длина дуги AB (рис. 15) равна

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i .$$

Теорема. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и имеет непрерывную производную $f'(x)$ на $[a;b]$, то существует $\lim\limits_{\max \Delta S_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i = S$.

Доказательство. Пусть Δy_i - приращение данной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$. По теореме Пифагора имеем $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.
Применяя теорему Лагранжа, получим $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta x_i f'(\xi_i)$ где $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Тогда

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_i)^2 (f'(\xi_i))^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}.$$

Т.о. длина вписанной ломаной равна $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$. Так как $f'(x)$ - непрерывна, то S_n представляет собой интегральную сумму для непрерывной функции $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Следовательно, предел этой интегральной суммы существует и равен

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Rightarrow \boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

ЗАМЕЧАНИЯ

а) Если верхний предел интегрирования считать переменным и обозначить через x, то длина дуги S будет функцией от x: $S(x) = \int\limits_a^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$ Тогда

$$S'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \text{ или } \frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow \boxed{dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.}$$

Получили формулу для дифференциала дуги dS.

б) Если кривая задана *параметрически,* то есть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где $\begin{matrix} \alpha \le t \le \beta \\ \varphi(\alpha) = a \quad \varphi(\beta) = b \end{matrix}$, то в интеграле для длины дуги кривой следует сделать замену переменных.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} y = \psi(t) \\ x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \\ x = a;\ t = \alpha \\ x = b;\ t = \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\, \varphi'(t)dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\, dt \Rightarrow \boxed{S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\, dt}.$$

в) Замена переменных проводится и в том случае, когда кривая задана в полярных координатах, то есть $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$. Переходя к переменным ρ и φ по формулам перехода от полярных координат к декартовым $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, получим $\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$, при $\alpha \le \varphi \le \beta$. В этом случае $\begin{cases} x'_\varphi = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi \\ y'_\varphi = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi \end{cases}$, а тогда

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'_{\varphi})^2+(y'_{\varphi})^2}\,d\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,d\varphi\Rightarrow\boxed{S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho'(\varphi))^2+(\rho(\varphi))^2}\,d\varphi}.$$

Пример. Найдите длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (рис. 16).

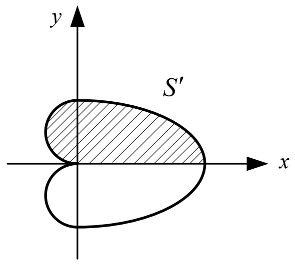

Рис. 16

$$S=2S'=2\int_0^{\pi}\sqrt{(-a\sin\varphi)^2+a^2(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2+2a^2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2\cdot 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a\,.$$

- ***Поверхность тела вращения***

Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ - непрерывны на $[a;b]$. Определим площадь поверхности, образованной вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox на отрезке $[a;b]$ (рис. 17).

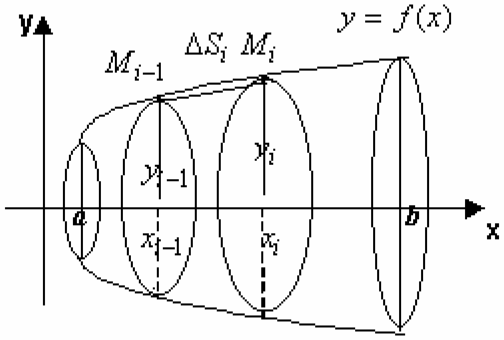

Рис. 17

Каждая хорда длины ΔS_i при вращении опишет усеченный конус, поверхность которого ΔP_i равна

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta S_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}.$$

Перейдем к пределу при $\max\Delta x_i\to 0$, т.е.

$$P=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\cdot\Delta x_i\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}=$$

$$=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}2\pi\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\text{, или }\boxed{P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}.$$

2.8. Несобственные интегралы

В определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что:

1) промежуток интегрирования $[a;b]$ конечен.

2) функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$.

Такой определенный интеграл называется *собственным* (слово собственный обычно опускается).

Если нарушается хотя бы одно из условий 1) или 2), то интеграл называется *несобственным определенным интегралом.*

Выясним смысл этого нового понятия для двух простейших случаев.

- ***Несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования (I рода)***

Этот интеграл по определению равен $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования часто называют несобственным интегралом 1 рода.

Если предел существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, в противном случае интеграл называется *расходящимся*.

Если $F(x)$ - первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(a)\right] = F(+\infty)-F(a),\ \text{где}\ F(+\infty)=\lim_{b\to+\infty}F(b)$$

Аналогичным образом определяются интегралы: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$.

Пример.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_1^{+\infty}x^{-\alpha}dx = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha} = \left[\begin{array}{ll}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha<1.\end{array}\right.$$

Если $\alpha=1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} = \infty$.

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ - сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Во многих случаях достаточно установить, сходится данный интеграл или расходится. Для этого могут быть полезными следующие теоремы.

Теорема 1 (Признак сравнения). Если для всех $x\ge a$ выполняется неравенство $0\le f(x)\le g(x)$ и если $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ тоже сходится, причем $\int_a^{+\infty}f(x)dx \le \int_a^{+\infty}g(x)dx$. Если же $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ - тоже расходится.

Пример. Исследовать сходится ли интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Т.к. $\dfrac{1}{x^2(1+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ - сходится, то данный интеграл сходится.

Теорема 2. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. В этом случае последний интеграл называется <u>*абсолютно сходящимся*</u>.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^3}dx$.

Так как $\left|\dfrac{\sin x}{x^3}\right| \le \left|\dfrac{1}{x^3}\right|$ и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^3}dx$ сходится, то данный интеграл сходится абсолютно.

Теорема 3 (Предельный признак сравнения). Если для всех $x \ge a$ функции $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$, причем $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x-1}{x}\cdot e^{-x}dx$ сходится, так как $\dfrac{x-1}{x}\cdot e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} < \infty$ — сходится.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x-1}{x}\cdot e^{x}dx$ расходится, так как $\dfrac{x-1}{x}\cdot e^{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{x}dx = e^{x}\Big|_1^{+\infty} = \infty$ — расходится.

- ***Несобственный интеграл от разрывной функции (II рода)***

Пусть $f(x)$ непрерывна при $a \le x < c$ и имеет точку разрыва при $x = c$. Тогда несобственный интеграл

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется <u>*сходящимся*</u> или <u>*расходящимся*</u> в зависимости от того, существует или нет конечный предел.

Аналогично определяются интегралы:

$$\int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{a\to c+0}\int\limits_a^b f(x)dx \text{ (разрыв в точке } a\text{)}$$

$$\text{и } \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{x_0} f(x)dx + \int\limits_{x_0}^b f(x)dx \text{ (разрыв в точке } x_0\text{).}$$

Пример. $\int\limits_0^a \dfrac{dx}{(x-a)^m} = \int\limits_0^a (x-a)^{-m}d(x-a) = \dfrac{(x-a)^{1-m}}{1-m}\Bigg|_0^a =$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^{1-m}}{1-m} - \frac{(-a)^{1-m}}{1-m} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{(-a)^{1-m}}{m-1}, & m<1, \\ \infty, & m>1. \end{array}\right.$$

Если $m=1$, то $\int\limits_0^a \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|\Big|_0^a = \infty \quad \Rightarrow$ расходится.

Таким образом интеграл $\int\limits_0^a \frac{dx}{(x-a)^m}$ сходится при $m<1$ и расходится при $m \ge 1$.

Рассмотрим теоремы, устанавливающие признаки сходимости несобственных интегралов от разрывной функции.

Теорема 1 (Признак сравнения). Если на отрезке $[a;c]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывные в точке c, причем $g(x) \ge f(x) \ge 0$ и $\int\limits_a^c g(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^c f(x)dx$ тоже сходится. Если же $\int\limits_a^c f(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^c g(x)dx$ тоже расходится.

Теорема 2. Если $f(x)$ разрывная функция в точке c и интеграл $\int\limits_a^c |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ тоже сходится и такая сходимость называется *абсолютной.*

Теорема 3. Если на отрезке $[a;c]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывные в точке c, причем $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$ и $f(x) \underset{x\to c}{\sim} g(x)$, то интегралы $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_a^c g(x)dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^2}}dx$ сходится, так как $\frac{1}{\sqrt{x+4x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ и $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ сходится.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Как определяется первообразная для заданной функции $f(x)$?
2. Какими свойствами обладают первообразные?
3. Как называется множество всех первообразных для одной функции?
4. Какими свойствами обладает неопределенный интеграл?
5. Как выглядит таблица неопределенных интегралов для основных элементарных функций?
6. По какому правилу вычисляются неопределенные интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$?
7. По какому правилу вычисляются неопределенные интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$?
8. Какая формула называется формулой интегрирования по частям?
9. Какие интегралы берутся с помощью формулы интегрирования по частям?
10. Что такое рациональная дробь?
11. Какая рациональная дробь называется правильной? Неправильной?
12. В каком виде может быть представлена неправильная рациональная дробь?
13. Какие рациональные дроби называются простейшими?
14. В каком виде может быть представлена правильная рациональная дробь?
15. Как вычисляются интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[k_m]{ax+b}\right)dx$?
16. Как вычисляются интегралы вида $\int R(x^{2n}, \sqrt{a^2-x^2})dx$?

17. Как вычисляются интегралы вида $\int R(x^{2n},\sqrt{a^2+x^2})dx$?

18. Как вычисляются интегралы вида $\int R(x^{2n+1},\sqrt{a^2\pm x^2})dx$?

19. Как вычисляются интегралы вида $\int R(x^{2n},\sqrt{x^2-a^2})dx$?

20. Какая подстановка называется универсальной тригонометрической подстановкой? Как выглядят формулы такой подстановки?

21. Как вычисляются интегралы вида $\int \sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$?

22. Как вычисляются интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x\,dx$ и $\int \mathrm{ctg}^m x\,dx$?

23. Можно ли утверждать, что для любой функции существует первообразная в виде суперпозиции элементарных функций?

24. Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$?

25. Каков геометрический смысл определенного интеграла?

26. Для какого класса функций существует определенный интеграл?

27. Перечислите основные свойства определенного интеграла?

28. Какой интеграл называется интегралом с переменным верхним пределом? От какой переменной он зависит и как вычисляется производная от него по этой переменной?

29. Какая формула называется формулой Ньютона-Лейбница и для чего она применяется?

30. Как проводится замена переменной в определенном интеграле?

31. Как выглядит формула интегрирования по частям в определенном интеграле?

32. Как с помощью определенного интеграла вычисляется площадь области, ограниченной кривыми, заданными в декартовой системе координат?

33. Как с помощью определенного интеграла вычисляется площадь области, ограниченной кривыми, заданными параметрическими уравнениями?

34. Как с помощью определенного интеграла вычисляется площадь криволинейного сектора в полярных координатах?

35. Как с помощью определенного интеграла вычисляется длина дуги кривой, заданной в декартовой системе координат?

36. Как с помощью определенного интеграла вычисляется длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями?

37. Как с помощью определенного интеграла вычисляется длина дуги кривой, заданной в полярной системе координат?

38. Как с помощью определенного интеграла вычисляется объем тела по сечениям?

39. Как с помощью определенного интеграла вычисляется объем тела вращения?

40. Как с помощью определенного интеграла вычисляется поверхность тела вращения?

41. Как определяется несобственный интеграл 1 рода?

42. Какой несобственный интеграл 1 рода называется сходящимся? Расходящимся?

43. Как определяется несобственный интеграл 2 рода?

44. Какой несобственный интеграл 2 рода называется сходящимся? Расходящимся?

45. Как формулируется признак сравнения несобственных интегралов 1 рода?

46. Какой несобственный интеграл 1 рода называется абсолютно сходящимся?

47. Как формулируется предельный признак сравнения несобственных интегралов 1 рода?

48. При каких значениях параметра p несобственный интеграл 1 рода $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ является сходящимся?

49. Как формулируется признак сравнения несобственных интегралов 2 рода?

50. Какой несобственный интеграл 2 рода называется абсолютно сходящимся?

51. Как формулируется предельный признак сравнения несобственных интегралов 2 рода?

52. При каких значениях параметра p несобственный интеграл 2 рода $\int\limits_a^{b}\frac{dx}{(x-b)^p}$ является сходящимся?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение первообразной и ее свойства.

2. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Неопределенные интегралы от основных элементарных функций.
4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.
5. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.
6. Рациональные дроби: правильные и неправильные. Простейшие рациональные дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей.
7. Выделение целой части в неправильной рациональной дроби. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.
8. Вычисление интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[k_m]{ax+b}\right)dx$, $\int R(x^{2n+1}, \sqrt{a^2 \pm x^2})dx$.
9. Вычисление интегралов вида $\int R(x^{2n}, \sqrt{a^2 \pm x^2})dx$, $\int R(x^{2n}, \sqrt{x^2 - a^2})dx$.
10. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
11. Определенный интеграл и его геометрический смысл.
12. Свойства определенных интегралов.
13. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.
14. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
16. Вычисление площадей областей, ограниченными кривыми в декартовых координатах с помощью определенного интеграла.
17. Вычисление площадей областей, ограниченными кривыми, заданными параметрическими уравнениями с помощью определенного интеграла.
18. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.
19. Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла.
20. Вычисление объемов тел вращение и поверхностей вращения с помощью определенного интеграла.
21. Вычисление длин дуг с помощью определенного интеграла.
22. Несобственный интеграл 1 рода: определение, признаки сходимости.
23. Несобственный интеграл 2 рода: определение, признаки сходимости.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

7. Интегральное исчисление функций одной переменной (18 часов)

14. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов. Методы интегрирования: подведение под знак дифференциала. Типовой расчет по темам **«Интегралы» и «Ряды»** (2 часа).

Л5. 1676 – 1694 (четные), 1703 – 1731 (нечетные).

15. Методы интегрирования: подведение под знак дифференциала (2 часа).

Л5. 1750 - 780 – 1694 (четные).

16. Метод интегрирования по частям (2 часа).

Л5. 1832 - 1846 (четные), 1862.

17. Интегрирование рациональных дробей (2 часа).

Л5. 1796, 1948, 2012, 2016, 2025, 2037, 2042.

18. Интегрирование иррациональных выражений. Интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная тригонометрическая подстановка (2 часа).

Л5. 1874, 1879, 2090, 2093, 2098, 2100, 2112.

19. Вычисление определенных интегралов. Замена переменных в определенном интеграле. Тригонометрические подстановки (2 часа).

Л5. 2275, 2284 – 2286, 2312.

20. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла. Вычисление длин дуг и объемов с помощью определенного интеграла (2 часа).

Л5. 2455, 2491, 2496, 2521, 2538, 2561, 2580 (1).

21. Контрольная работа (2 часа).

- Вычислить неопределенный интеграл подведением под знак дифференциала.
- Вычислить неопределенный интеграл интегрированием по частям.
- Вычислить интеграл от рациональной дроби.