Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Я.Ю.Ионченкова

Тема 1. Элементы линейной алгебры

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 22.143

УДК 512.83

Я.Ю.Ионченкова. Высшая математика. Тема 1. Элементы линейной алгебры. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с. 45.
Табл. 23 . Библиогр.: 6 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей и предназначено для организации их самостоятельной работы. Оно содержит тематический план 1-го семестра, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Элементы линейной алгебры», теоретический материал, контрольные вопросы по теории, вопросы для подготовки к экзамену. Для самоконтроля полученных знаний в пособии приведен тест, состоящий из теоретических и практических заданий с выбором ответа. В конце пособия имеется список литературы в соответствии с программой по математике для инженерных специальностей и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой контрактной подготовки специалистов.

Я.Ю.Ионченкова

Тема 1. Элементы линейной алгебры

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Н.В.Васильева

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 1 - го СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план

№ темы	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Всего аудиторных	Из них		
				Лекции	Практические занятия	
1	Элементы линейной алгебры.	50	28	14	14	22
2	Векторная алгебра.	18	8	4	4	10
3	Аналитическая геометрия.	48	28	14	14	20
4	Теория пределов.	48	28	14	14	20
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1.	26	16	8	8	10
Всего за 1 семестр		190	108	54	54	82

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

1. Элементы линейной алгебры (14 часов)

1. Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ). Решение СЛАУ. Матрица СЛАУ. Размерность матрицы. СЛАУ 2-го, 3-го и n-го порядка. Определители 2-го и 3-го порядка. Формулы Крамера (2 часа).
2. Свойства определителей. Виды матриц. Действия с матрицами (2 часа).
3. Невырожденная матрица. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Матричная запись СЛАУ n-го порядка. Формулы Крамера для СЛАУ n-го порядка (2 часа).
4. Расширенная матрица СЛАУ. Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Базисные и свободные переменные (2 часа).
5. Минор матрицы. Ранг матрицы. Преобразования, не меняющие ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли (2 часа).
6. Однородная СЛАУ. Тривиальное решение. Теорема Кронекера-Капелли для однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений. Линейное (векторное) пространство. Линейное пространство R^n. Линейно зависимые и линейно независимые векторы (2 часа).
7. Размерность линейного пространства. Базис. Разложение вектора по базису. Евклидово пространство. Скалярное произведение векторов в R^n. Ортогональные векторы. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Стандартный базис (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

1. Элементы линейной алгебры

1.1. Система линейных алгебраических уравнений

Определение 1

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ) называется система вида: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, где a_{ij} - коэффициент в i-ом уравнении при неизвестном x_j, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ - свободные члены.

Определение 2

Решением СЛАУ называется упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, который обращает каждое уравнение системы в верное равенство (тождество).

Определение 3

Таблица коэффициентов при неизвестных в СЛАУ называется матрицей системы и обозначается: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$. При этом горизонтальные ряды в матрице называются ее строками, а вертикальные – ее столбцами. Числа, образующие матрицу, называются ее элементами. Элемент a_{ij} находится в матрице в i-ой строке и в j-ом столбце.

Определение 4

Если число строк m не равно числу столбцов n $(m \neq n)$, матрица называется прямоугольной размерности $m \times n$. Обозначается: $A_{m \times n}$.

Определение 5

Матрица, имеющая один столбец или одну строку, называется, соответственно, матрицей – столбцом или матрицей – строкой.

Определение 6

Матрица вида: $X_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - называется столбцом неизвестных, а $B_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ - столбцом свободных членов в СЛАУ.

Определение 7

Матрица размерности $n\times n$: $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется квадратной n-ого порядка. Элементы a_{ii}, где $i=1,2,\dots,n$, квадратной матрицы называются диагональными, эти элементы расположены на, так называемой, главной диагонали матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ

СЛАУ n-ого порядка называется система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$.

1.2. СЛАУ второго, третьего и n-ого порядка. Определители. Формулы Крамера

Теорема 1

Рассмотрим СЛАУ второго порядка: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$. Если $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам: $x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$, $x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$.

Доказательство

Умножим первое уравнение системы на a_{22}, а второе уравнение - на $(-a_{12})$ и сложим их. Получим линейное уравнение, в которое входит только неизвестное x_1, $(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$. Если $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$, то это уравнение имеет единственное решение: $x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$.

Теперь умножим первое уравнение системы на $(-a_{21})$, а второе уравнение - на a_{11} и сложим их. Получим линейное уравнение, в которое входит только неизвестное x_2, $(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$. Если $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$, то это уравнение имеет единственное решение: $x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$.

Определение 1

Пусть задана матрица второго порядка: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Число, которое определяется через элементы этой матрицы по правилу: $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$, называется определителем матрицы или определителем второго порядка и обозначается: $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Определение 2

Рассмотрим СЛАУ второго порядка: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$. Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы. Определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, получающиеся из Δ заменой столбцов из коэффициентов при x_1 и, соответственно, при x_2 столбцом свободных членов называются вспомогательными определителями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если обратить внимание на формулы, по которым вычисляются x_1 и x_2 в теореме 1, то можно увидеть, что знаменатель дроби для x_1 и x_2 - это Δ, числитель дроби для $x_1 - \Delta_1$, числитель дроби для $x_2 - \Delta_2$ и сформулировать следующую теорему.

Теорема 2

Если определитель СЛАУ второго порядка Δ отличен от нуля $(\Delta \neq 0)$, то система имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$. Эти формулы называются формулами Крамера.

Определение 3

Пусть задана матрица третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Число, которое определяется через элементы этой матрицы по правилу: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$, называется определителем матрицы или определителем третьего порядка и обозначается:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Обращаем Ваше внимание, что в каждое слагаемое входит один и только один элемент из каждого столбца и строки матрицы.

Определение 4

Рассмотрим СЛАУ третьего порядка: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$. Определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ и $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$, получающиеся из Δ заменой по очереди столбцов из коэфициентов при x_1, при x_2 и при x_3 столбцом свободных членов, называются вспомогательными определителями.

Для СЛАУ третьего порядка также справедливы формулы Крамера.

Теорема 3

Если определитель СЛАУ третьего порядка Δ отличен от нуля $(\Delta \neq 0)$, то система имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено по формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Пример

Решить СЛАУ: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$.

Решение

Вычислим определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} = 4 - 27 + 8 - 12 + 24 - 3 = -6$.

Вспомогательные определители вычисляем по такому же правилу, что и определитель Δ. Получим: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -18$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 12$. Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет только одно решение. Находим его по формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-12}{-6} = 2$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-18}{-6} = 3$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{12}{-6} = -2$.

Рассмотрим СЛАУ n-ого порядка: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$. Для нее так же справедливы формулы Крамера.

Теорема 4

Если определитель СЛАУ n-ого порядка Δ отличен от нуля $(\Delta \neq 0)$, то система имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ - определитель системы, а вспомогательные определители: $\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ получаются из Δ заменой столбца из коэффициентов при x_j столбцом свободных членов $(j = 1, 2, \dots, n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Доказательство теоремы 4 будет приведено далее.

1.3. Свойства определителей

Определение 1

Матрица, полученная из данной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, транспонированной по отношению к данной, и обозначается: $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Свойство 1

Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.

Свойство 2

Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то определитель поменяет знак.

Свойство 3

Определитель с двумя пропорциональными (в частности, равными) строками (столбцами) равен нулю.

Свойство 4

Если в определителе строка (столбец) целиком состоит из нулей, то определитель равен нулю.

Свойство 5

Общий множитель всех элементов какой либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Свойство 6

Правило сложения определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}' + a''_{21} & a_{22}' + a_{22}'' & \dots & a_{2n}' + a_{2n}'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a''_{21} & a_{22}'' & \dots & a_{2n}'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т.е. если каждый элемент некоторой строки (столбца) представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, причем в одном из них соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а в другом – из вторых слагаемых, остальные же строки (столбцы) – те же, что и в исходном определителе.

Свойство 7

Определитель не изменится, если ко всем элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число λ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & \dots & a_{2n} + \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 2

Верхней треугольной матрицей называется матрица вида: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определение 3

Нижней треугольной матрицей называется матрица вида: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определение 4

Диагональной матрицей называется матрица вида: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Свойство 8

Определитель диагональной, треугольной (верхней и нижней) матрицы равен произведению диагональных элементов.

Определение 5

Минором элемента определителя $a_{i\,j}$ называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца. Обозначается: $\Delta_{i\,j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Минор – это определитель, порядок которого на единицу меньше, чем у исходного.

Определение 6

Алгебраическим дополнением элемента определителя $a_{i\,j}$ называется число: $A_{i\,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i\,j}$, где $\Delta_{i\,j}$ - соответствующий минор.

Пример 1

Дан определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. Вычислить Δ_{23} и A_{23}.

Решение

Так как нужно вычислить минор и алгебраическое дополнение элемента a_{23}, вычеркиваем в определителе вторую строку и третий столбец: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & \cancel{-1} \\ \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{5} \\ -4 & 1 & \cancel{-3} \end{vmatrix}$. Тогда:

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 11,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\Delta_{23} = -11.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Так как знак перед минором в алгебраическом дополнении определяется только местом элемента в определителе, то правило выбора знаков выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Свойство 9

Теорема разложения

Определитель равен сумме произведений элементов какой – либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Это означает, что если взять в определителе i-ую строку, то его величину можно вычислить по следующей формуле: $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$. Такой способ вычисления определителя называется разложением его по элементам i-ой строки (аналогично определяется разложение определителя по элементам j-ого столбца).

Пример 2

Вычислить определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первого столбца.

Решение

1 способ

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix} = -14 .$$

2 способ

Используя 7–ое свойство, обратим некоторые элементы первого столбца в ноль. Это упростит вычисление определителя. Умножим первую строку на (-3) и прибавим ко второй строке, затем умножим первую строку на (-7) и прибавим к третьей строке: $\Delta = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\\ 7 & 1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}(-3) & (-7)\\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & -13 & -19\end{vmatrix}$. Заметим, что вторая строка имеет общий множитель (-2), а третья - (-1). Поэтому, применяя дважды 5–ое свойство, получим: $\Delta = (-2)(-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 13 & 19\end{vmatrix}$. В первом столбце остался лишь один элемент, отличный от нуля. Тогда, разложив определитель по элементам первого столбца, получим: $\Delta = 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 13 & 19\end{vmatrix} = -14$.

Свойство 10

Сумма произведений элементов какой – либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Например, сумма произведений элементов первой строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов второй строки равна нулю: $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

1.4. Матрицы. Действия с матрицами

Сложение матриц

Суммой двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элемент $c_{i\,j}$ которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots n$. Обозначается: $A + B = C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Действие сложения определено только для матриц одной размерности.

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число λ называется матрица $B_{m\times n}$, элементы которой получаются из элементов матрицы A умножением на число λ: $b_{i\,j} = \lambda a_{i\,j}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначается: $\lambda A = B$.

Умножение матриц

Произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элемент $c_{i\,j}$ которой, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, есть сумма произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}, \qquad \text{где} \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначается: $A \cdot B = C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Произведение матрицы A на матрицу B вводится только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пример

Найти произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} -1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -3+4+1 & 15-6-4 \\ -2-8+0 & 10+12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -10 & 22 \end{pmatrix} = C_{2\times2},$$

$$B_{3\times2} \cdot A_{2\times3} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 22 & -1 \\ 0 & 16 & -2 \\ -5 & -18 & 1 \end{pmatrix} = D_{3\times3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3

В общем случае умножение матриц не подчиняется коммутативному (переместительному) закону: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Определение

Матрицы, для которых справедливо $A \cdot B = B \cdot A$, называются коммутативными (перестановочными).

Теорема

Если A и B - квадратные матрицы n-ого порядка, то определитель произведения матриц равен произведению определителей: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

1.5. Обратная матрица

Определение 1

Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной. Обозначается: E.

Теорема 1

Для любой квадратной матрицы n-ого порядка справедливы равенства: $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Доказательство

$$A_{n\times n}\cdot E_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=A_{n\times n},$$

доказательство того, что $E\cdot A=A$ - аналогично.

Определение 2

Квадратная матрица $A_{n\times n}$ называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля: $|A|\neq 0$.

Определение 3

Пусть A - квадратная матрица n-ого порядка. Обратной для матрицы A называется матрица, обозначаемая A^{-1}, для которой выполняются равенства: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Обратная матрица имеет такой же порядок, что исходная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Матрицы A и A^{-1} - коммутативны.

Определение 4

Матрица $C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$, называется союзной к матрице A.

Теорема 2

Если A - квадратная невырожденная матрица, то для нее существует обратная матрица A^{-1}, такая что: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot C^T$, где C - союзная матрица.

Доказательство

1) A^{-1} существует, так как $|A|\neq 0$ по условию.

2) Рассмотрим матрицу $A_{n\times n}$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, составим союзную матрицу $C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ и транспонируем ее: $C^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$. Вычислим произведение: $A\cdot A^{-1}=A\cdot\frac{1}{|A|}\cdot C^T=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=$ (по 9-ому и 10-ому свойствам определителя) $=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=E$.

Из этого следует, что матрица $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot C^T$ действительно является обратной.

Пример

Найти обратную матрицу для матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Вычислим определитель: $|A|=30\neq 0$. Найдем союзную матрицу:

$$C=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -10 & 11 \\ -14 & 10 & -2 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем ее: $C^T=\begin{pmatrix} 17 & -14 & 5 \\ -10 & 10 & -10 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Получим: $A^{-1}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix} 17 & -14 & 11 \\ -10 & 10 & -10 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Проверка

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -14 & 11 \\ -10 & 10 & -10 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

1.6. Матричные уравнения. Матричная запись СЛАУ. Формулы Крамера

Рассмотрим два типа матричных уравнений:

1. $A_{n\times n} \cdot X_{n\times m} = B_{n\times m}$.

Теорема 1

Для матричного уравнения: $A \cdot X = B$ решение находится по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Доказательство

Пусть A - невырожденная матрица, то есть $|A| \neq 0$, из этого следует, что существует обратная матрица A^{-1}. Умножим матричное уравнение $A \cdot X = B$ слева на A^{-1}, получим: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, откуда: $X = A^{-1} \cdot B$.

Пусть дана СЛАУ n -ого порядка: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

Рассмотрим следующие матрицы: матрицу системы: $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, столбец неизвестных: $X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и столбец свободных членов: $B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Теорема 2

Матричная запись СЛАУ имеет вид: $A \cdot X = B$.

Доказательство

Перемножим матрицы: $A_{n\times n} \cdot X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = B_{n\times 1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Очевидно, что матричная запись СЛАУ это частный случай 1–ого типа матричных уравнений (при $m = 1$), поэтому ее решение также находится по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример 1

Решить матричным методом СЛАУ: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Решение этой системы мы уже находили по формулам Крамера.

Решение

Выпишем матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, столбец неизвестных: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и столбец свободных членов: $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$. Определитель системы: $|A| = -6 \neq 0$. Находим обратную матрицу: $A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда решение системы в матричной форме имеет вид: $X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, следовательно:

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$.

Вернемся к теореме 4 из пункта 1.2. Ранее эта теорема была оставлена без доказательства, теперь мы уже можем ее доказать.

Теорема 1.2.4

Если определитель СЛАУ n-ого порядка Δ отличен от нуля $(\Delta \neq 0)$, то системе имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Доказательство

При $|A| \neq 0$ решение системы может быть найдено матричным методом, то есть:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot C^T \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вспомним, что в формулах Крамера вспомогательные определители (Δ_j) получаются из определителя системы заменой столбца коэффициентов при неизвестном x_j столбцом свободных членов, то есть: $\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,j-1} & b_1 & a_{1,\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,j-1} & b_2 & a_{2,\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,j-1} & b_n & a_{n,\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, где $j = 1, 2, \dots n$. Разложим эти определители по элементам j-ого столбца: $\Delta_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}$ и подставим эти разложения в решение системы, получим: $X = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}$, где $\Delta = |A|$ - определитель системы. Отсюда следует, что решение системы действительно может быть найдено по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, при $\Delta \neq 0$.

2. $X_{m \times n} \cdot A_{n \times n} = B_{m \times n}$.

Теорема 3

Для матричного уравнения $X \cdot A = B$ решение находится по формуле: $X = B \cdot A^{-1}$.

Доказательство

Пусть A - невырожденная матрица, то есть $|A| \neq 0$, из этого следует, что существует обратная матрица A^{-1}. Умножим матричное уравнение $X \cdot A = B$ справа на A^{-1}, получим: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, $X \cdot E = B \cdot A^{-1}$, откуда: $X = B \cdot A^{-1}$.

Пример 2

Решить матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Выпишем матрицы A и B: $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Так как определитель $|A| = 11 \neq 0$, находим обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда решение матричного уравнения имеет вид: $X_{3\times 2} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 12 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.7. Расширенная матрица СЛАУ. Элементарные преобразования

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Определение 1

Если к матрице системы приписать справа столбец свободных членов, то получится матрица вида: $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$. Эта матрица называется расширенной матрицей СЛАУ.

ЗАМЕЧАНИЕ

Расширенная матрица представляет собой краткую запись системы.

Определение 2

Элементарными преобразованиями называются такие преобразования расширенной матрицы, которые не меняют множество решений системы. Знак элементарного преобразования: $\Rightarrow$ или ~.

К элементарным преобразованиям относятся:

1. перемена местами строк;

2. перемена местами столбцов с запоминанием какому неизвестному соответствует каждый столбец:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right);$$

(столбцы первой матрицы: $x_1\ x_2\ \dots\ x_n$; второй: $x_2\ x_1\ \dots\ x_n$)

3. умножение (деление) строки на число, отличное от нуля;
4. прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и тоже число;
5. вычеркивание одной из двух пропорциональных (в частности, равных) строк;
6. вычеркивание нулевой строки.

1.8. Метод Гаусса

Целью метода Гаусса является: пользуясь элементарными преобразованиями получить в первых k - строках и k - столбцах расширенной матрицы единичную матрицу.

При этом возможны три случая:

1. Расширенная матрица СЛАУ приведена к виду:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{array}\right) \end{array}$$

. Система имеет единственное решение $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \dots\dots \\ x_n = c_n \end{cases}$.

Пример 1

Методом Гаусса решить СЛАУ: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Это уже третий способ решения данной системы. До этого решение системы было найдено по формулам Крамера и матричным методом.

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right) \end{array}$.

1 – ый шаг. Получим в верхнем левом углу матрицы единицу. Для этого поменяем местами первую и вторую строки: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right) \end{array}$. Умножим первую строку на (-2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим первую строку на (-3) и прибавим ее к третьей строке. После выполнения указанных операций все элементы первого столбца матрицы, кроме a_{11}, окажутся равными нулю:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right) \end{array} (-2) \quad (-3) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right) \end{array}.$$

Чтобы упростить дальнейшие вычисления, мы еще разделим третью строку на общий множитель всех ее элементов – (-2):

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right) \end{array} : (-2) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \end{array}\right) \end{array}.$$

2 – ой шаг. Теперь сделаем элемент a_{22} равным единице, а остальные элементы второго столбца “обнулим”. Для этого поменяем местами вторую и третью строки:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \end{array}\right) \end{array}.$$

Умножим вторую строку на (-2) и прибавим ее к первой строке, затем к третьей строке прибавим вторую строку:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \end{array}\right) \end{array} (-2) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -12 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \end{array}.$$

3 – ий шаг. Разделим третью строку на (-3), после этого элемент a_{33} будет равен единице:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -12 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \end{array} : (3) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -12 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array}.$$

Умножим третью строку на (5) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим третью строку на (-7) и прибавим ее к первой строке, тогда все элементы третьего столбца матрицы, кроме a_{33}, окажутся равными нулю:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -12 \\ 0 & 1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array} (5) \quad (-7) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array}.$$

В итоге получаем единственное решение системы: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$.

2. Расширенная матрица СЛАУ приведена к виду:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \gamma_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & \gamma_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_k & \beta_k & \dots & \gamma_k & c_k \end{array}\right) \end{array}.$$

В этом случае система имеет бесконечно много решений, которые можно записать в виде: $\begin{cases} x_1 = c_1 - \alpha_1 x_{k+1} - \beta_1 x_{k+2} - \ldots - \gamma_1 x_n \\ x_2 = c_2 - \alpha_2 x_{k+1} - \beta_2 x_{k+2} - \ldots - \gamma_2 x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = c_k - \alpha_k x_{k+1} - \beta_k x_{k+2} - \ldots - \gamma_k x_n \end{cases}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ - базисные неизвестные, $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ - свободные неизвестные (любые вещественные числа).

Пример 2

Решить СЛАУ: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$.

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и выполним действия по методу Гаусса:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-2) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{-5} & \cancel{-4} \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \end{array}\right) \end{array} :(5) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \end{array} (-2) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \end{array}.$$

Таким образом, получаем бесконечно много решений системы в виде: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5} - x_3 \\ x_2 = \dfrac{4}{5} - x_3 \end{cases}$, где x_1, x_2 - базисные неизвестные, x_3 - свободная неизвестная. Если обозначить $x_3 = t$ (t - любое вещественное число), решение системы можно записать в виде: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - t \\ \frac{4}{5} - t \\ t \end{pmatrix}$.

3. Расширенная матрица СЛАУ приведена к виду:

$$\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_n & \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \end{array}\right)$$

, где хотя бы одно из чисел $c_{k+1}, \dots, c_n$ отлично от нуля. В этом случае система не имеет решений.

Пример 3

Решить СЛАУ: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$.

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и выполним действия по методу Гаусса:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (-1) \quad (-2) \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ (-1) \quad (-1) \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

. Последнее уравнение системы имеет вид: $0 = 3$. Следовательно, данная система несовместна.

1.9. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли

Определение 1

Пусть в матрице $A_{m \times n}$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \le \min(m, n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется минором k-ого порядка матрицы A.

Пример 1

Дана матрица: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 7 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти в ней какой-нибудь минор второго порядка и какой-нибудь минор третьего порядка.

Решение

$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$ - минор второго порядка, $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18$ - минор третьего порядка.

Определение 2

Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы A называется ее рангом. Обозначается $r(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если ранг матрицы равен k, то из этого следует, что среди миноров k-ого порядка хотя бы один отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

Преобразования, не меняющие ранг матрицы:

1. перемена местами строк (столбцов);
2. умножение (деление) строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3. прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число;
4. вычеркивание одной из двух пропорциональных (в частности, равных) строк (столбцов);
5. вычеркивание нулевой строки (столбца).

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Обращаем Ваше внимание, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, поэтому ранг матрицы удобно находить методом Гаусса.

Пример 2

Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 5 & -2 & 6\\ -3 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2) & (3)\\ \\ \\ \end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 9 & -8 & -2\\ 0 & -2 & 8 & 14\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 9 & -8 & -1\\ 0 & -2 & 8 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$:(2)$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -8 & -1\\ 0 & 6 & 8 & 7\end{pmatrix}(-1)\ (-6)\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 11 & 3\\ 0 & 1 & -8 & -1\\ 0 & 0 & 56 & 13\end{pmatrix}.$$ Так как можно указать минор 3-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 11\\ 0 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 56\end{vmatrix}=56\neq 0$, то $r(A)=3$.

Теорема Кронекера – Капелли

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$. Выпишем матрицу этой системы: $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$ и ее расширенную матрицу:

$$B_{m\times(n+1)}=\begin{array}{c}\underline{\begin{matrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{matrix}}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)\end{array}.$$

1. Для того чтобы СЛАУ была совместна, необходимо и достаточно, чтобы $r(A)=r(B)$.

2. Это решение единственно тогда и только тогда, когда $r(A)=r(B)=n$.

3. Если $r(A)=r(B)<n$, то СЛАУ имеет бесконечно много решений.

Прокомментируем эту теорему примерами из пункта 1.8., выписывая расширенные матрицы систем и матрицы, полученные из расширенной в результате применения метода Гаусса.

Пример 1

Решить СЛАУ: $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3=9\\ x_1+2x_2-3x_3=14\\ 3x_1+4x_2+x_3=16\end{cases}$.

Решение

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array}$$

. Так как можно указать минор 3-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то $r(A) = r(B) = 3$. А так как число неизвестных: $n = 3$, то $r(A) = r(B) = n$. Из этого, по теореме Кронекера – Капелли, следует, что система имеет единственное решение, которое имеет вид: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$.

Пример 2

Решить СЛАУ: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$.

Решение

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \end{array}$$

. Так как можно указать минор 2-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то $r(A) = r(B) = 2$. Число неизвестных: $n = 3$, значит $r(A) = r(B) < n.$ Из этого, по теореме Кронекера – Капелли, следует, что система имеет бесконечно много решений. Все эти решения можно записать в виде: $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - t \\ \frac{4}{5} - t \\ t \end{pmatrix}$, где $x_3 = t$ - любое вещественное число.

Пример 3

Решить СЛАУ: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$.

Решение

$$B=\begin{array}{c} \underline{\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \underline{\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

. Так как в матрице, полученной из матрицы A в результате применения метода Гаусса, все миноры 3-го порядка равны нулю, но есть минор 2-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то $r(A) = 2$. А в матрице, полученной из расширенной матрицы B, есть минор 3-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, то $r(B) = 3$. Следовательно, $r(A) \neq r(B)$ и система не имеет решений.

1.10. Однородные СЛАУ

Определение 1

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется однородной (однородной СЛАУ), если все свободные члены $b_i = 0$, где $i = 1,2,\ldots,m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Однородная СЛАУ всегда совместна, она всегда имеет нулевое (тривиальное) решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0 \text{ или } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу однородной системы: $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и ее расширенную матрицу:

$$B_{m\times(n+1)} = \begin{array}{c} \underline{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array}} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Так как матрица B отличается от матрицы A только нулевым столбцом, что не дает новых миноров, отличных от нуля, то у однородной СЛАУ $r(A)=r(B)$.

Теорема 1 (теорема Кронекера-Капелли для однородной СЛАУ)

Если $r(A)=r(B)=n$, то однородная СЛАУ имеет единственное решение (нулевое). Если $r(A)=r(B)<n$, то однородная СЛАУ имеет бесконечно много решений (есть ненулевые решения).

Пример 1

Имеет ли однородная СЛАУ: $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1-7x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-12x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$ ненулевые решения и какие?

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и выполним действия по методу Гаусса:

$$B=\begin{array}{c} x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -12 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-2)\quad(-3) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} \\ :(-1)\Rightarrow \\ :(-2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1\quad x_3\quad x_2\quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-1)\quad(-1) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1\quad x_3\quad x_2\quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ :(-1) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x_1\quad x_3\quad x_2\quad x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1\quad x_3\quad x_4\quad x_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-3)\quad(2) \Rightarrow \begin{array}{c} x_1\quad x_3\quad x_4\quad x_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Так как есть минор 3-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, то $r(A)=r(B)=3$. Поскольку число неизвестных: $n=4$, то $r(A)=r(B)<n$. Из этого следует, что система имеет ненулевые решения. Эти решения можно записать в виде: $X=\begin{pmatrix} 5t \\ t \\ -3t \\ 0 \end{pmatrix}$, ($t$ - любое вещественное число), при $t\neq 0$: X - ненулевой.

Определение 2

Пусть однородная СЛАУ имеет k ненулевых решений $X_1, X_2, \dots, X_k$. Эти решения образуют фундаментальную систему, если любое решение системы X, можно представить в виде: $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_k$, где $c_1, c_2, \dots, c_k$- произвольные постоянные. Это выражение называется линейной комбинацией решений $X_1, X_2, \dots, X_k$. При этом, если ранг матрицы системы с n неизвестными равен r, то число решений в фундаментальной системе (число свободных неизвестных): $k = n - r$.

Пример 2

Имеет ли однородная СЛАУ: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ ненулевые решения? Если да, то найти их, выписав фундаментальную систему решений.

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и выполним действия по методу Гаусса:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (-2) \quad (-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{7} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-1) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Один из миноров 2-го порядка отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно $r(A) = r(B) = 2$. Так как число неизвестных: $n = 4$, то $r(A) = r(B) < n$. Из этого следует, что система имеет бесконечно много решений (есть ненулевые решения), которые можно записать в виде: $\begin{cases} x_1 = -5x_2 - 3x_4 \\ x_3 = 7x_2 + 2x_4 \end{cases}$, где x_1, x_3 - базисные неизвестные, x_2, x_4 - свободные неизвестные (любые вещественные числа). Найдем их. Поскольку число свободных неизвестных: $k = n - r = 2$, то в фундаментальной системе будет два решения. Обозначив: $\begin{cases} x_2 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$, получим решение системы в виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5c_1 - 3c_2 \\ c_1 + 0c_2 \\ 7c_1 + 2c_2 \\ 0c_1 + c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1X_1 + c_2X_2, \quad \text{где} \quad X_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ -}$$

фундаментальная система решений.

Теорема 2

Если матрица A однородной СЛАУ – квадратная, то однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

Пример 3

Имеет ли однородная СЛАУ: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ ненулевые решения?

Решение

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ - квадратная. Так как $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, то система имеет только нулевое решение: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.11. Определение линейного пространства

Определение 1

Линейным (векторным) пространством называется множество X, состоящее из элементов любой природы, в котором определены операции сложения элементов и умножения элементов на число:

- $\forall\, x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$;
- $\forall\, x \in X, \forall\, \alpha \in R \Rightarrow \alpha \cdot x \in X$;

удовлетворяющие следующим условиям:

1) $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in X$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in X$;

3) $\alpha(\beta\, x) = (\alpha\, \beta) x \quad \forall\, \alpha, \beta \in R$, $\forall\, x \in X$;

4) $(\alpha + \beta) x = \alpha\, x + \beta\, x \quad \forall\, \alpha, \beta \in R$, $\forall\, x \in X$;

5) $\alpha(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y \quad \forall\, \alpha \in R$, $\forall\, x, y \in X$;

6) существует нулевой элемент 0, такой что: $x + 0 = x \quad \forall\, x \in X$;

7) $\forall\, x \in X$ существует противоположный элемент $(-x)$, такой что: $x + (-x) = 0$.

Элементы линейного пространства называются векторами.

Пример 1

R - множество вещественных чисел – образует линейное пространство.

Пример 2

R^+ - множество вещественных положительных чисел – не является линейным пространством, так как: $\forall\, x \in R^+$, $\forall\, \alpha < 0 \Rightarrow \alpha\, x \notin R^+$.

Пример 3

Множество столбцов вида: $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}_{n\times1}$ образует линейное пространство, так как на нем определены линейные операции:

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}_{n\times1}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}_{n\times1}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\cdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}_{n\times1},\quad \alpha x=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}_{n\times1}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\cdots\\\alpha x_n\end{pmatrix}_{n\times1}.$$

Первые пять свойств очевидны, они следуют из свойств, которым подчиняются линейные операции с матрицами, нулевым элементом является столбец: $0=\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}$, а противоположным элементом для $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}_{n\times1}$ является $(-x)=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\\cdots\\-x_n\end{pmatrix}_{n\times1}$.

Определение 2

Множество столбцов размерности $n\times1$ образует линейное пространство R^n. Каждый элемент этого пространства: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}_{n\times1}\in R^n$ называется вектором.

1.12. Линейная зависимость и независимость векторов в R^n

Определение 1

Пусть $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\in R^n$. Линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n$ называется вектор: $c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+\ldots+c_n\vec{x}_n$, где $c_1,c_2,\ldots,c_n\in R$.

Определение 2

Векторы: $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\in R^n$ называются линейно независимыми, если $c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+\ldots+c_n\vec{x}_n=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$.

Определение 3

Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in R^n$ называются линейно зависимыми, если существует набор чисел: $c_1, c_2, \ldots, c_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такой что $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \ldots + c_n\vec{x}_n = \vec{0}$.

Пример 1

Определить являются ли векторы: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ линейно зависимыми или они линейно независимы.

Решение

Так как: $\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, можно составить линейную комбинацию, равную нулевому вектору (нулевую линейную комбинацию): $1 \cdot \vec{x}_1 + 1 \cdot \vec{x}_2 + (-1) \cdot \vec{x}_3 = \vec{0}$, в которой $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$. Поскольку мы указали ненулевой набор чисел 1, 1, -1, такой, что линейная комбинация равна нулевому вектору, то из определения следует, что $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ - линейно зависимы.

Пример 2

Определить являются ли векторы: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно зависимыми или они линейно независимы.

Решение

Так как: $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3 = \vec{0}$ только при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, из определения следует, что $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ - линейно независимы.

Теорема 1

Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in R^n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда какой – то один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Теорема 2

Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in R^n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

1.13. Размерность линейного пространства. Базис

Определение 1

Размерностью линейного пространства называется максимальное число линейно независимых векторов этого пространства.

Теорема 1

В n - мерном пространстве любые $(n+1)$ векторов – линейно зависимые.

Доказательство

Рассмотрим векторы: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$, $\dots$, $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ \dots \\ x_{n,n+1} \end{pmatrix}$. Составим нулевую линейную комбинацию этих векторов: $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n + c_{n+1}\vec{x}_{n+1} = \vec{0}$. Подставим в это равенство $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$:

$c_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_n\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix} + c_{n+1}\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ \dots \\ x_{n,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Получили векторное равенство, которому соответствует однородная СЛАУ относительно $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$:

$\begin{cases} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \dots + x_{1n}c_n + x_{1,n+1}c_{n+1} = 0 \\ x_{21}c_1 + x_{22}c_2 + \dots + x_{2n}c_n + x_{2,n+1}c_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + \dots + x_{nn}c_n + x_{n,n+1}c_{n+1} = 0 \end{cases}$. Так как: $r(A) = r(B) < n$ (число неизвестных равно $(n+1)$), система имеет ненулевые решения, из чего следует, что векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}$ линейно зависимы.

Определение 2

Базисом в линейном пространстве называется набор линейно независимых векторов, такой, что любой вектор этого пространства может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов.

Это означает, что $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ образуют базис $\Leftrightarrow$ $\forall\ \vec{x} \in R$ может быть представлен в виде: $\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n$. При этом числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ называются координатами вектора $\vec{x}$ в данном базисе.

Теорема 2

В линейном пространстве R^n базис образуют n линейно независимых векторов.

Доказательство

Если $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in R^n$ - линейно независимы, то $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}$, где $\vec{x} \in R^n$, будут по теореме 1 линейно зависимы. Следовательно, существует ненулевой набор чисел $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$, такой, что:

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n + c_{n+1}\vec{x}_{n+1} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Заметим, что c_{n+1} заведомо отлично от нуля (ибо в противном случае из векторного равенства (1) вытекала бы линейная зависимость $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$). Но тогда, поделив равенство (1) на c_{n+1} и положив $\alpha_1 = -\frac{c_1}{c_{n+1}}, \alpha_2 = -\frac{c_2}{c_{n+1}}, \ldots, \alpha_n = -\frac{c_n}{c_{n+1}}$, получим из (1): $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n$. Отсюда, так как $\vec{x}$ - произвольный вектор пространства R^n, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ - базис по определению.

Теорема 3

Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in R^n$. Для того, чтобы векторы: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \cdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ были линейно независимыми необходимо и достаточно, чтобы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Доказательство

Составим нулевую линейную комбинацию этих векторов: $c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \ldots + c_n \vec{x}_n = \vec{0}$.

Подставим в это выражение $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$: $c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \cdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Получили векторное равенство, которому соответствует однородная СЛАУ относительно $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{cases} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \ldots + x_{1n}c_n = 0 \\ x_{21}c_1 + x_{22}c_2 + \ldots + x_{2n}c_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + \ldots + x_{nn}c_n = 0 \end{cases}.$$

Матрица этой системы: $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ - квадратная, поэтому, если $\Delta = |A| \neq 0$, система имеет только нулевое решение. Из этого следует, что векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ - линейно независимы.

Пример

Образуют ли векторы: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ базис? Если да, то разложить вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ по этому базису.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$ (по теореме 3) векторы – линейно независимы.

Следовательно (по теореме 2), $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ образуют базис. Тогда $\vec{x} \in R^3$ можно разложить по этому базису, то есть представить в виде линейной комбинации базисных векторов: $\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3$. Подставим в это равенство $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$: $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. Получили векторное равенство, которому соответствует СЛАУ относительно c_1, c_2, c_3: $\begin{cases} -5c_1 - 4c_2 + 7c_3 = 9 \\ 3c_2 + 8c_3 = -1 \\ c_1 + c_2 - c_3 = -2 \end{cases}$. Решим ее методом Гаусса.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \\ -5 & -4 & 7 & 9 \end{array}\right) \end{array} (5) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -1 \end{array}\right) \end{array} (-1)\ (-3) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \end{array} :(2) \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} (-2)\ (3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$ Получим: $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -3 \\ c_3 = 1 \end{cases}$, то есть $\vec{x} = 2\vec{x}_1 - 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, где c_1, c_2, c_3 - координаты вектора $\vec{x}$ в базисе векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

1.14. Евклидово пространство. Нормированное пространство. Ортонормированный базис

Определение 1

Линейное (векторное) пространство называется евклидовым, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$ ставится в соответствие число, которое обозначается: $(\vec{x}, \vec{y})$ и называется скалярным произведением, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$;

2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n$;

3) $(\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \alpha \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$, $\forall \alpha \in R$;

4) $(\vec{x}, \vec{x}) \ge 0$, $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in R^n$.

Определение 2

В линейном пространстве R^n $\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, скалярное произведение определяется по следующему правилу: $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Из определения ясно, что все четыре свойства скалярного произведения выполняются.

Определение 3

Векторы $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ называются ортогональными, если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Определение 4

Евклидово пространство называется нормированным, если $\forall \vec{x} \in R^n$ ставится в соответствие число, которое обозначается: $\|\vec{x}\|$ и называется нормой вектора $\vec{x}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|\vec{x}\| \ge 0$, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in R^n$;

2) $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in R^n$, $\forall \alpha \in R$;

3) Неравенство треугольников: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$.

Определение 5

Линейное пространство R^n можно нормировать, введя норму по следующему правилу: $\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \quad \forall \vec{x} \in R^n$.

Теорема

(Неравенство Коши – Буняковского)

$(\vec{x}, \vec{y})^2 \le (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$.

Доказательство

Пусть $\lambda \in R$. Так как $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$, то и $\vec{x} - \lambda \vec{y} \in R^n$, и значит можно вычислить скалярное произведение: $0 \le (\vec{x} - \lambda \vec{y}, \vec{x} - \lambda \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) - \lambda(\vec{y}, \vec{x}) - \lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2 (\vec{y}, \vec{y}) =$ $= \lambda^2 (\vec{y}, \vec{y}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{x})$. Обозначив: $A = (\vec{y}, \vec{y})$, $B = (\vec{x}, \vec{y})$, $C = (\vec{x}, \vec{x})$, получим квадратное неравенство относительно переменной λ: $A\lambda^2 - 2B\lambda + C \ge 0$. Из того, что $A \ge 0$, следует, что дискриминант квадратного трехчлена в левой части неравенства $D \le 0$, а значит $\frac{D}{4} = B^2 - AC \le 0$. Отсюда $B^2 \le AC$, то есть $(\vec{x}, \vec{y})^2 \le (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})$.

Теорема 2

Введенная таким образом в R^n норма удовлетворяет всем трем условиям.

Доказательство

Первые два свойства очевидны, они следуют из свойств скалярного произведения. Докажем неравенство треугольников: $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) =$ $= \left\|\vec{x}\right\|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + \left\|\vec{y}\right\|^2 \le$ (по неравенству Коши – Буняковского) $\le \left\|\vec{x}\right\|^2 + 2\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}\sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} + \left\|\vec{y}\right\|^2 = \left\|\vec{x}\right\|^2 + 2\left\|\vec{x}\right\| \left\|\vec{y}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|^2 = \left(\left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|\right)^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим: $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| \le \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$.

Определение 6

Базис векторов в линейном нормированном пространстве называется ортонормированным, если все базисные вектора попарно ортогональны и нормы их равны единице.

Теорема 3

Векторы: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют в R^n ортонормированный базис.

Доказательство

1) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \in R^n$, их n штук и, так как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, они линейно независимы, следовательно $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ образуют базис;

2) $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{bmatrix} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{bmatrix} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} называется символом Кронекера $i, j = 1,2,\ldots,n$), следовательно $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - попарно ортогональны;

3) векторы нормированы, так как $\left\|\vec{e}_1\right\| = \left\|\vec{e}_2\right\| = \ldots = \left\|\vec{e}_n\right\| = 1$.

Определение 7

Базис векторов: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - называется стандартным.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Как вычисляется определитель второго порядка? Третьего порядка?
2. Для каких СЛАУ решение может быть найдено по формулам Крамера?
3. В каких случаях определитель равен нулю?
4. Что называется минором элемента определителя? Алгебраическим дополнением элемента определителя?
5. Как формулируется теорема разложения определителя по i-ой строке (j-ому столбцу)?
6. Для каких матриц определено действие сложения матриц? Умножения матриц?
7. Какая матрица называется обратной к матрице A?
8. Для каких матриц существует обратная?
9. Как выглядит матричная запись СЛАУ?
10. Какие преобразования расширенной матрицы СЛАУ называются элементарными? Перечислите их.
11. Что называется минором k-го порядка матрицы?
12. Что называется рангом матрицы?
13. Каково необходимое и достаточное условие совместности СЛАУ?
14. В каком случае СЛАУ имеет единственное решение? Бесконечно много решений?
15. В каком случае однородная СЛАУ имеет ненулевые решения?
16. Что называется фундаментальной системой решений однородной СЛАУ?
17. Чем определяется число решений в Ф. С. Р.?
18. Какие векторы называются линейно независимыми? Линейно зависимыми?
19. Каково необходимое и достаточное условие линейной независимости векторов?
20. Что является базисом в линейном пространстве R^n?
21. Какие векторы образуют стандартный базис в пространстве R^n?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определители 2-го и 3-го порядков. Формулы Крамера для решения СЛАУ 2-го и 3-го порядков.
2. Свойства определителей.
3. Действия с матрицами.
4. Обратная матрица. Теорема существования и вид обратной матрицы.
5. Матричные уравнения. Матричный метод решения СЛАУ.
6. Расширенная матрица СЛАУ. Элементарные преобразования.
7. Метод Гаусса.
8. Ранг матрицы. Преобразования, не меняющие ранга. Теорема Кронекера-Капелли.
9. Однородная СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли для однородных СЛАУ. Фундаментальная система решений (Ф.с.р.).
10. Линейное (векторное) пространство. Линейное пространство R^n .
11. Линейно независимые и линейно зависимые векторы. Условие линейной независимости.
12. Размерность линейного пространства. Базис.
13. Евклидово пространство. Нормированное пространство. Ортонормированный базис.
14. Неравенство Коши-Буняковского.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Элементы линейной алгебры (12 часов).

1. Определители 2-го и 3-го порядка. Формулы Крамера. Решение СЛАУ 2-го и 3-го порядка по формулам Крамера. Выдача типового расчета №1 (Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия) (2 часа).
   Л.5 гл. 3 §1: 1.1, 1.3, 1.10 – 1.12, 1.17; §4: 4.1, 4.5, 4,6.
2. Определитель n-го порядка. Вычисление определителей n-го порядка. Действия с матрицами (2 часа).
   Л.5 гл. 3 §1: 1.44 – 1.47, 1.51; §2: 2.2, 2.4 – 2.10, 2.16.
3. Обратная матрица. Обращение матриц через союзную матрицу. Решение СЛАУ матричным методом. Решение матричных уравнений (2 часа).
   Л.5 гл. 3 §2: 2.28, 2.30, 2.31, 2.39 – 2.42.
4. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Решение СЛАУ методом Гаусса (2 часа).
   Л.5 гл. 3 §3: 3.25,3.26; §4: 4.22 – 4.27.
5. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ. Решение однородных СЛАУ методом Гаусса (2 часа).
   Л.5 гл. 3 §4: 4.37 – 4.39, 4.41.
6. Разложение вектора из R^3 по базису. Прием типового расчета №1 (Линейная алгебра) (2 часа).
   Л.5 гл. 4 §1: 1.30, 1.31.
7. Контрольная работа (2 часа).
   - Вычисление определителя.
   - Решение СЛАУ матричным методом.
   - Построение фундаментальной системы решений однородной СЛАУ.
   - Разложение вектора по заданному базису.