Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)
Кафедра математики

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева, В.В.Григорьев-Голубев

Тема 5. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.** Часть 2

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2005

ББК 50

УДК 517.22.16

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева, В.В.Григорьев-Голубев. Математика. Тема 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2005. с. 48.

Ил. 27 . Табл. 50 . Библиогр.: 5 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Учебное пособие разработано в виде компендиума по изучаемой дисциплине. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменных», теоретический материал по этой теме с большим количеством разобранных типовых задач, а также контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту. Работа выполнена по заказу и при поддержке ФЦКПС

Е.С.Баранова, Н.В.Васильева, В.В.Григорьев-Голубев

Тема 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор Н.Н. Катрушенко

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 2 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций.
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 5. «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»..
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 2–го СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план

№ темы	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самостоятельная работа
			Всего аудиторных	Из них		
				Лекции	Практические занятия	
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2.	48	28	16	12	20
6	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.	38	26	12	14	12
7	Интегральное исчисление функций одной переменной.	66	44	24	20	22
8	Ряды.	38	28	20	8	10
Всего за 2 семестр		190	126	72	54	**64**

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2 (16 часов)

1. Дифференциал и его геометрический смысл. Формула дифференциала. Правила дифференцирования. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формулы первого дифференциала. Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически. Приближенные вычисления с помощью дифференциала (2 часа).
2. Производные и дифференциалы высших порядков. Монотонные функции. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функций (2 часа).
3. Теоремы Ферма, Ролля, и Лагранжа. Правила Лопиталя. Вычисление пределов с помощью правила Лопиталя (2 часа).
4. Определение экстремума. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Острый экстремум. Критические точки функции. Исследование функций с помощью первой производной (2 часа).
5. Выпуклость и вогнутость функций. Условие выпуклости (вогнутости) функции. Точки перегиба. Достаточные условия точки перегиба. Исследование функций с помощью второй производной (2 часа).
6. Асимптоты графика функции (вертикальные и наклонные). Построение графиков функций. Наибольшее и наименьшее значения функций (2 часа).
7. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора и Маклорена. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано и Лагранжа (2 часа).
8. Формула Маклорена для основных элементарных функций. Вычисление пределов с помощью формул Тейлора и Маклорена. Исследование функций с помощью производных высших порядков (2 часа).

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Оглавление

- Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций.
- Применение формулы Тейлора.
- Исследование функций с помощью производных высших порядков.

1. Дифференцирование функций одной переменной

1.2. Дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков

Дифференциал. Формула дифференциала

Определение

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, принадлежащей ее области определения и пусть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции в точке x_0. Линейная относительно приращения аргумента Δx часть приращения функции в этой точке называется ее *дифференциалом* и обозначается dy.

ЗАМЕЧАНИЕ

Так как приращение Δy функции, дифференцируемой в точке x_0, представимо в виде $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, то линейной относительно Δx частью приращения функции является первое слагаемое $f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Из определения следует формула дифференциала:

$$dy = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

В произвольной точке x формула дифференциала имеет вид:

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x.$$

Поскольку для функции $y = x$ в любой точке производная $f'(x) = 1$, то дифференциал для нее совпадает с ее приращением, то есть $dy = dx = \Delta x$. Учитывая это, формулу для дифференциала записывают в виде:

$$dy = f'(x)\cdot dx.$$

Из определения и формулы дифференциала следует, что при вычислении дифференциала справедливы правила, аналогичные правилам дифференцирования

Правила дифференцирования

$d(c) \equiv 0$, если $c = \text{const}$.

$d(c\cdot f(x)) = c\cdot d(f(x))$, если $c = \text{const}$.

$d(f(x) \pm g(x)) = d(f(x)) \pm d(g(x))$.

$d(f(x)\cdot g(x)) = d(f(x))\cdot g(x) + f(x)\cdot d(g(x))$.

$d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{d(f(x))\cdot g(x) - f(x)\cdot d(g(x))}{g^2(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Пример

Вычислите дифференциал функции $y = \cos^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}$ в произвольной точке x.

Решение

По правилу вычисления дифференциала произведения двух функций, запишем

$$dy = d\left(\cos^2 x\right)\cdot\sqrt{1-x^2} + \cos^2 x\cdot d\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

Учитывая, что $d\left(\cos^2 x\right) = \left(\cos^2 x\right)'_x\cdot dx = 2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot dx$,

$$d\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'_x\cdot dx=\tfrac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\cdot dx\text{, получим}$$

$$dy=2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx+\cos^2 x\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)dx=$$

$$=\left(2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\sqrt{1-x^2}+\cos^2 x\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\right)\cdot dx\,.$$

Геометрический смысл дифференциала

Геометрически дифференциал равен *приращению ординаты касательной,* проведенной к графику функции в точке дифференцируемости.

Доказательство

Пусть AB – касательная, проведенная к графику функции в точке x_0. По формуле дифференциала $dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$. Так как $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, то $dy=\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x$. Из треугольника ABK (рис.1), видно, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x=BK$, где катет BK является приращением ординаты касательной к графику функции. Следовательно, $dy=BK$.

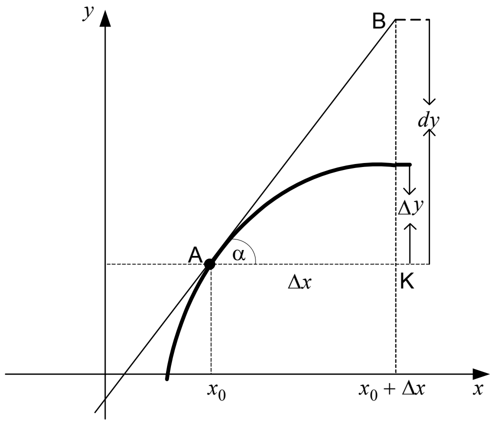


Рис.1

Инвариантность формулы дифференциала

Теорема 1

Формула для дифференциала $dy=f'(x)\cdot dx$ обладает свойством инвариантности, то есть сохраняет свой вид и в том случае, если x не простая переменная, а некоторая функция.

Доказательство

Было доказано, что для дифференциала справедлива формула $dy=f'(x)\cdot dx$, если x - простая переменная.

Пусть теперь x является функцией другой переменной t. То есть $x=x(t)$, где t - простая переменная. Тогда функция $y=f(x)$ является сложной функцией простой переменной t: $y=y(x(t))$. По формуле для дифференциала

$$dy=[y(x(t))]'_t\cdot dt\,.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$[y(x(t))]'_t=y'_x\cdot x'_t\,,$$

а так как $x'_t\cdot dt=dx$, то дифференциал dy можно записать в виде $dy=y'_x\cdot dx=f'(x)\cdot dx$, то есть формула дифференциала сохраняет свой вид.

Следствие

Из теоремы 1 следует, что производную y' функции $y = f(x)$ можно записывать в виде $\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$, независимо от того, является x простой переменной или функцией другой переменной.

Иногда удобно вычислять дифференциал, не раскрывая до конца производные сложных функций, а пользуясь инвариантностью его формулы.

Пример

Вычислите дифференциал функции $y = \dfrac{\operatorname{arctg}^3 x}{\sqrt[3]{3-5x}}$ в произвольной точке x.

Решение

По правилу вычисления дифференциала частного двух функций, запишем

$$dy = d\left(\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{\sqrt[3]{3-5x}}\right) = \frac{d\left(\operatorname{arctg}^3 x\right)\cdot \sqrt[3]{3-5x} - \operatorname{arctg}^3 x \cdot d\left(\sqrt[3]{3-5x}\right)}{\left(\sqrt[3]{3-5x}\right)^2}.$$

Раскрывая дифференциалы $d\left(\operatorname{arctg}^3 x\right)$ и $d\left(\sqrt[3]{3-5x}\right)$, получим выражение для дифференциала dy в следующем виде

$$dy = \frac{3\operatorname{arctg}^2 x\ d(\operatorname{arctg} x)\sqrt[3]{3-5x} - \operatorname{arctg}^3 x\ \frac{1}{3}(3-5x)^{-\frac{2}{3}} d(3-5x)}{\left(\sqrt[3]{3-5x}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\operatorname{arctg}^2 x \cdot dx \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \sqrt[3]{3-5x} - \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{3}\cdot(3-5x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-5)\cdot dx}{\left(\sqrt[3]{3-5x}\right)^2},$$

или, окончательно,

$$dy = \frac{3\operatorname{arctg}^2 x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \sqrt[3]{3-5x} + \operatorname{arctg}^3 x \cdot \frac{5}{3}(3-5x)^{-\frac{2}{3}} \cdot}{\left(\sqrt[3]{3-5x}\right)^2}\cdot dx.$$

Производные функций, заданных параметрически. Дифференцирование неявных функций

Теорема 1. Производная функции, заданной параметрически

Если функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$, где t – параметр и если функции $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ дифференцируемы в точке t, то функция $y = f(x)$ также дифференцируема в точке $x(t)$ и ее производная вычисляется по правилу: $\boxed{y'_x = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}}$.

Доказательство

Было показано, что производную y'_x можно представить как отношение дифференциалов: $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$.

Поскольку функции $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ дифференцируемы в точке t, соответствующей точке x, то, используя формулу дифференциала, dy и dx можно представить в виде:

$dy = \phi'(t)\cdot dt$, $dx = \varphi'(t)\cdot dt$. Тогда $y'_x = \dfrac{\phi'(t)\cdot dt}{\varphi'(t)\cdot dt} = \dfrac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пример 1

Вычислите производную y'_x функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$.

Решение

По теореме о производной функции, заданной параметрически, можно записать

$$y'_x = \frac{\left(\sqrt[3]{t}\right)'_t}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)'_t} = \frac{\frac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{3} t^{\frac{5}{6}}.$$

Теорема 2. Производная функции, заданной неявно

Если дифференцируемая в точке x функция $y = y(x)$ задана соотношением $F(x, y) = 0$ и если при этом функция $F(x, y(x))$ - дифференцируема в точке x, то производную $y'(x)$ можно определить из равенства

$$\left(F(x, y(x))\right)'_x = 0,$$

так как функция $F(x, y(x))$ тождественно равна постоянной и, следовательно, ее производная равна нулю.

Пример 2

Вычислите производную y'_x, если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно равенством

$$x^3 y + x \cdot y^3 - 3x^2 - 3y^2 + e^{xy} = 0.$$

Решение

Согласно теореме 2 производную y'_x следует определять из равенства

$$\left(x^3 y + x \cdot y^3 - 3x^2 - 3y^2 + e^{xy}\right)'_x = 0.$$

Вычислим все производные в левой части этого соотношения, используя правила дифференцирования.

$$3x^2 y + x^3 y'_x + y^3 + x \cdot 3y^2 y'_x - 6x - 6yy'_x + e^{xy}\left(y + xy'_x\right) = 0.$$

Из полученного равенства определим производную y'_x.

$$\left(x^3 + 3x\, y^2 - 6y + e^{xy} x\right) \cdot y'_x = 6x - 3x^2 y - y^3 - e^{xy} y.$$

$$y'_x = \frac{6x - 3x^2 y - y^3 - e^{xy} y}{x^3 + 3x \cdot y^2 - 6y + e^{xy} x}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Аналогично вычисляется дифференциал функции, заданной неявно.

Пример 3

Найдите дифференциал функции $y = y(x)$, заданной неявно равенством

$x^2 + y^2 + \sqrt{xy} = 0$.

Решение

Поскольку переменная y является функцией x, то левая часть заданного уравнения $x^2 + y^2 + \sqrt{xy}$ также является функцией x. Эта функция тождественно равна нулю. Следовательно, ее дифференциал тождественно равен нулю, то есть

$$d\left(x^2+y^2+\sqrt{xy}\right)=0.$$

Вычислим дифференциал каждого слагаемого в левой части, используя правила дифференцирования

$$d\left(x^2\right)+d\left(y^2\right)+d\left(\sqrt{xy}\right)=0\text{, или } 2x\cdot dx+2y\cdot dy+\frac{x\cdot dy+y\cdot dx}{2\sqrt{xy}}=0.$$

Из полученного равенства определим дифференциал dy .

$$\left(2y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\cdot dy=-2x\cdot dx-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot dx\text{, или } dy=-\frac{2x+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}}{2y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Обращаем Ваше внимание на то, что в примерах 2 и 3 производная и дифференциал неявных функций также являются неявными функциями. В выражения для них входит функция y , вид которой неизвестен.

Вычисление дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

Дифференциал является функцией двух переменных x и Δx . Чтобы вычислить его значение в некоторой точке x_0 , следует задать не только значение x_0 , но и величину приращения аргумента Δx .

Пример 1

Найти значение дифференциала для функции $y=\sqrt{2x-1}$ в точке $x_0=5$ при приращении аргумента $\Delta x=0{,}03$.

Решение

Так как дифференциал $dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$, производная равна $f'(x)=\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, а значение производной в заданной точке $x_0=5$ равно $f'(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5-1}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$, то $dy=\frac{1}{3}\cdot 0{,}03=0{,}01$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если $f'(x_0)\neq 0$, то дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 является бесконечно малой того же порядка, что Δx и отличается от приращения функции на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx , то есть $\Delta y\approx dy$. Это используют в приближенных вычислениях.

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке $x_0+\Delta x$ и число Δx достаточно мало. Тогда из формулы приращения функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ можно получить соотношение

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta y\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

в котором приращение функции приближенно заменено дифференциалом.

Пример 2

Вычислить приближенно $\operatorname{arctg}1{,}02$, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Решение

Требуется вычислить значение функции $y=\operatorname{arctg}x$ в точке $x=1{,}02$. Представим $x=x_0+\Delta x$ так, чтобы значение функции в точке x_0 легко вычислялось, а Δx было бы достаточно (с учетом точности вычислений) малым.

Ясно, что в предложенной задаче удобно взять $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}02$. Теперь обозначим $y_0 = f(x_0)$, а значение функции в точке x представим в виде $y = y_0 + \Delta y$, где Δy – приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx.

Учитывая замечание, приращение функции Δy приближенно заменим дифференциалом в точке x_0 при приращении аргумента $\Delta x = 0{,}02$. Получим $y_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7852$, $y' = f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Поскольку $\Delta y \approx dy = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 0{,}01$, то $y = \operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}7852 + 0{,}01 = 0{,}7952$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Следует заметить, что, поскольку приращение функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, то вычисления сделаны с абсолютной погрешностью, не превосходящей $0{,}02$.

Производные высших порядков

Определение 1

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *второй производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается y'', или $f''(x_0)$.

При этом функция $y = f(x)$ называется *дважды дифференцируемой* в точке x_0.

Аналогично определяются производные более высокого порядка $f'''(x_0)$, $f^{iv}(x_0)$, …., $f^{(n)}(x_o)$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Из определения производных высших порядков следует, что вторая производная – это производная от первой производной, третья производная – это производная от второй производной, и так далее.

Пример 1

Вычислить третью производную y''' функции $y = \dfrac{x}{e^x}$ в произвольной точке x.

Решение

Сначала вычислим первую производную, используя правило дифференцирования частного двух функций:

$$y' = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}.$$

Упростим это выражение $y' = \dfrac{e^x \cdot (1 - x)}{e^{2x}} = \dfrac{1 - x}{e^x}$ и вычислим вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{1 - x}{e^x}\right)' = \frac{(1 - x)' e^x - (1 - x) \cdot \left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-e^x - (1 - x) \cdot e^x}{e^{2x}}.$$

Полученное выражение можно упростить.

$$y'' = \frac{-e^x(1 + 1 - x)}{e^{2x}} = \frac{-(2 - x)}{e^x} = \frac{x - 2}{e^x}$$

и вычислить третью производную.

$$y''' = \left(\frac{x-2}{e^x}\right)' = \frac{(x-2)'e^x - (x-2)\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x - (x-2)\cdot e^x}{e^{2x}},$$

которая после всех возможных упрощений примет вид

$$y''' = \frac{e^x(1-x+2)}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}.$$

Пример 2

Получите выражение производной n – го порядка $y^{(n)}$ для функции $y = \ln(x+1)$.

Решение

Получим выражения для производных первого, второго, третьего и четвертого порядков, проводя последовательное дифференцирование заданной функции.

$$y' = \frac{1}{x+1}, \quad y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad y''' = \frac{1\cdot 2}{(x+1)^3}, \quad y^{IV} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}.$$

Из выражений для этих производных ясно, что каждое последующее дифференцирование увеличивает на единицу показатель степени выражения $(x+1)$ в знаменателе и добавляет в числитель натуральный сомножитель, на единицу больший предыдущего.

Знаки в производных чередуются, причем в производных четного порядка знак минус. Учитывая это, запишем выражение для производной произвольного (n – го) порядка:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{(x+1)^n}.$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется *«n – факториал»* и обозначается: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$.

Учитывая это обозначение, выражение для n – й производной функции $y = \ln(x+1)$ можно переписать в виде:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}.$$

Пример 3

Получите выражение производной n – го порядка $y^{(n)}$ для функции $y = \cos x$.

Решение

Вычислим последовательно $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$, $y''' = \sin x$, $y^{IV} = \cos x$. Далее производные будут повторяться при $n = n + 4$.

Если использовать формулы приведения для вычисления значений функции $\cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ при $n = 1, 2, 3, 4$, то легко убедиться, что они совпадают с производными первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Следовательно, производную n – го порядка для функции $y = \cos x$ можно записать в виде

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Пример 4

Вычислить производную второго порядка от функции $y = y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t^3 + 3t^2 + 4 \\ y = \sin^2 t \end{cases}$.

Решение

Вычислим первую производную y'_x по правилу дифференцирования функции, заданной параметрически.

$$y'_x = \frac{\left(\sin^2 t\right)'_t}{\left(t^3 + 3t^2 + 4\right)'_t} = \frac{2\sin t \cdot \cos t}{3t^2 + 6t} = \frac{\sin 2t}{3t^2 + 6t}.$$

Чтобы вычислить вторую производную, учтем, что производная y'_x также является параметрически заданной функцией. То есть первая производная y'_x задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = t^3 + 3t^2 + 4 \\ y'_x = \dfrac{\sin 2t}{3t^2 + 6t} \end{cases}$.

Для вычисления второй производной можно использовать то же правило дифференцирования, что и для первой.

$$y''_{x^2} = \frac{\left(\dfrac{\sin 2t}{3t^2+6t}\right)'_t}{\left(t^3 + 3t^2 + 4\right)'_t} = \frac{\dfrac{2\cos 2t\cdot\left(3t^2+6t\right) - \sin 2t\cdot(6t+6)}{\left(3t^2+6t\right)^2}}{3t^2 + 6t} = \frac{6\left(\cos 2t\left(t^2 + 2t\right) - \sin 2t\,(t+1)\right)}{\left(3t^2 + 6t\right)^3}.$$

Теорема. Механический смысл первой и второй производной

Если $x(t)$ – путь, пройденный материальной точкой, движущейся прямолинейно, за время t, то $x'(t)$ – скорость точки в момент времени t, а $x''(t)$ – ее ускорение в момент времени t.

Доказательство

Средняя скорость между моментами времени t и $t + \Delta t$ равна $v_{\text{ñð.}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, где $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ – путь, пройденный за время Δt. Скорость $v(t)$ в момент времени t определяется как предел средней скорости за промежуток времени Δt при $\Delta t \to 0$. Тогда

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ñð.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t).$$

Среднее ускорение за временя Δt равно $a_{\text{ñð.}} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, где $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ – изменение скорости за время Δt. Ускорение $a(t)$ в момент времени t определяется как предел среднего ускорения за промежуток времени Δt при $\Delta t \to 0$. Тогда $a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} a_{ср.} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$.

Следствие

Если $x(t)$ – смещение материальной точки за время t вдоль оси Ox под действием силы $F(t)$, то, используя второй закон Ньютона $m \cdot a = F$, можно записать уравнение ее движения $m \cdot x''(t) = F(t)$, где m – масса точки, а F - равнодействующая всех сил, приложенных к ней.

Дифференциалы высших порядков.

Определение

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x. *Дифференциалом второго порядка* от функции $f(x)$ или *вторым дифференциалом* в точке x называется дифференциал от ее первого дифференциала $d(dy)$. Второй дифференциал обозначается $d^2 y$.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3 y$, четвертого порядка $d^4 y$, и так далее.

Теорема

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и x – независимая переменная, то формула для второго дифференциала имеет вид:

$$d^2 y = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

Доказательство

По определению второго дифференциала $d^2 y = d(dy)$. Используя формулу для первого дифференциала dy, получим

$$d^2 y = d\left(f'(x) \cdot dx\right) = d\left(f'(x)\right) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx).$$

Так как для независимой переменной дифференциал dx равен приращению Δx и не зависит от переменной x, то $d(dx) = 0$. Тогда

$$d^2 y = d\left(f'(x)\right) \cdot dx = f''(x) \cdot dx \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2.$$

Следствие

Если x – независимая переменная, то формула для дифференциала n – го порядка имеет вид:

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n.$$

Пример 1

Найти дифференциал второго порядка для функции $y = e^{\sin x}$.

Решение

Формула для второго дифференциала имеет вид:

$$d^2 y = y'' \cdot (dx)^2.$$

Вычислим первую производную: $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$. Затем вычислим вторую производную:

$$y'' = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x).$$

Проведем в полученном выражении все упрощения. Получим

$$y'' = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right).$$

Подставив, найденную формулу для второй производной в формулу дифференциала, окончательно запишем второй дифференциал в виде:

$$d^2 y = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right) \cdot dx^2.$$

Пример 2

Найти формулу для дифференциала n – го порядка $d^n y$ функции $y = \sin x$.

Решение

При решении используем формулу для дифференциала n – го порядка

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n.$$

Вычислим производные: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$, $y^{V} = \cos x = y'$, $y^{VI} = y''$ и так далее. Заметим, что $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, при $n = 1,2,3,4$. Тогда

$$d^n y = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot (dx)^n .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Дифференциалы второго и более высокого порядков не обладают свойством инвариантности, то есть их формула меняется, если x не является независимой переменной.

Для независимой переменной x формула второго дифференциала имеет вид: $d^2 y = f''(x) \cdot (dx)^2$. Если x не является независимой переменной, то $d(dx) \neq 0$. Тогда

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x) \cdot dx) = f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) \cdot d^2 x .$$

2. Исследование функций

2.1. Монотонные функции. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопиталя.

Монотонные функции. Признаки монотонности

Определение 1

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (строго возрастающей) на промежутке $[a,b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a;b]$, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 2

Функция $f(x)$ называется *убывающей* (строго убывающей) на промежутке $[a,b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a;b]$, удовлетворяющих условию $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) < f(x_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если функция убывает или возрастает на всем промежутке $[a,b]$, то она называется *монотонной* (строго монотонной) на промежутке $[a,b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

В определении 1 и 2 знаки неравенства между значениями функции могут быть нестрогими. При этом:

если при $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *неубывающей* (не строго возрастающей);

если при $x_1 > x_2$ справедливо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *невозрастающей* (не строго убывающей).

Теорема 1

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $[a,b]$.

Если производная $f'(x) > 0$ для всех значений $x \in [a;b]$, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a,b]$;

Если производная $f'(x) < 0$ для всех значений $x \in [a;b]$, то функция $f(x)$ убывает на промежутке $[a,b]$.

Доказательство

Если $f'(x) > 0$, то по определению производной в точке x справедливо неравенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \text{, или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 .$$

Очевидно, что из этого следует неравенство

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0 \qquad (1)$$

В справедливости последнего неравенства легко убедиться, если предположить обратное, то есть $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\le 0$ и перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Полученный результат $f'(x_0)\le 0$ противоречит условию и доказывает верность неравенства (1). Из неравенства (1) следует:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x>0 \Rightarrow f(x+\Delta x)>f(x)\\ \Delta x<0 \Rightarrow f(x+\Delta x)<f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ возрастает.}$$

Поскольку это выполняется во всех точках $x\in[a;b]$, то функция возрастает на всем промежутке $[a,b]$.

Аналогично доказывается теорема для убывающей функции $f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Если $f'(x)\ge 0$ для всех, то $f(x)$ – неубывающая функция на промежутке $[a,b]$. Если $f'(x)\le 0$ для всех $x\in[a;b]$, то $f(x)$ – невозрастающая функция на промежутке $[a,b]$.

Теорема 2

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках промежутка $[a,b]$.

Если $f(x)$ возрастает на промежутке $[a,b]$, то $f'(x)\ge 0$ для всех значений $x\in[a,b]$.

Если $f(x)$ убывает на промежутке $[a,b]$, то $f'(x)\le 0$ для всех значений $x\in[a,b]$.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a,b]$. Из определения возрастающей функции следует, что при $\Delta x>0$ выполняется неравенство $f(x+\Delta x)>f(x)$, которое равносильно неравенству $f(x+\Delta x)-f(x)>0$.

Если $\Delta x<0$, то для возрастающей функции выполняется неравенство $f(x+\Delta x)<f(x)$, или равносильное ему неравенство $f(x+\Delta x)-f(x)<0$.

Следовательно, выражения $f(x+\Delta x)-f(x)$ и Δx имеют одинаковые знаки, из чего следует, что

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\Delta x\to 0$, получим, что

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0.$$

Аналогично доказывается теорема для убывающей функции $f(x)$.

Замечание 4

Аналогично доказывается теорема 2, если функция $f(x)$ возрастает или убывает на промежутке $[a,b]$ не строго.

Замечание 5

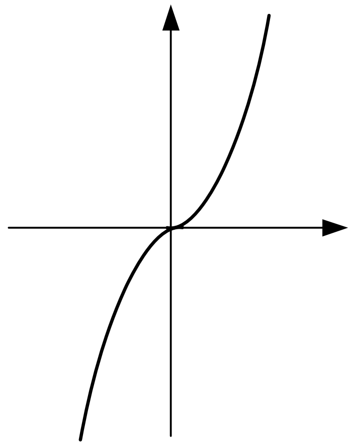


Рис. 2

Следует иметь в виду, что производная строго возрастающей или строго убывающей на промежутке $[a,b]$ функции может в каких-то точках обращаться в ноль. Примером является функция $y = x^3$, которая строго возрастает на всей числовой оси (рис.2), но ее производная $y' = 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.

Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке

Напомним некоторые свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке, которые будут использоваться в этом разделе.

- Функция $f(x)$, непрерывная на промежутке $[a,b]$, принимает на этом промежутке наибольшее и наименьшее значения (рис.3).
- Функция $f(x)$, непрерывная на промежутке $[a,b]$, ограничена на этом промежутке. Функция, график которой показан на рисунке 3, ограничена, так как $y_{íàèì.} \le f(x) \le y_{íàèá.}$.

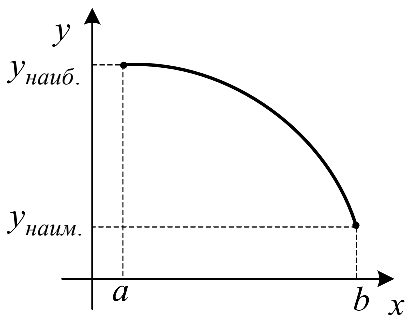


Рис. 3

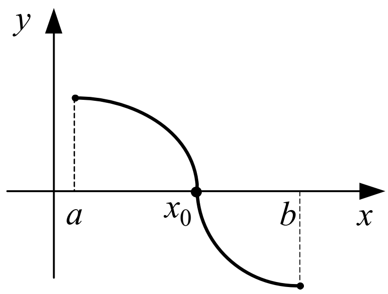


Рис. 4

- Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$ и принимает на концах промежутка значения разных знаков, то она имеет хотя бы один корень на этом промежутке (рис.4).

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа.

Теорема Ферма

Если функция $f(x)$:

непрерывна на $[a,b]$;

дифференцируема на (a,b);

имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ наибольшее или наименьшее значение;

то $f'(x_0)=0$.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 наибольшее значение. Из этого следует (рис.5), что

при $a < x < x_0$ функция $f(x)$ возрастает и $f'(x) \geq 0$;

при $x_0 < x < b$ функция $f(x)$ убывает и $f'(x) \leq 0$.

Следовательно, $f'(x)$ меняет знак в точке x_0 и $f'(x_0)=0$.

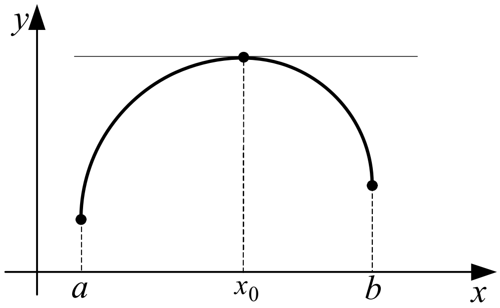


Рис. 5

Аналогично доказывается теорема, если $f(x)$ имеет в точке x_0 наименьшее значение.

Следствие

Если $x_0 \in (a,b)$ (внутренняя точка) и $f'(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция не может иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения. Если бы в точке $x_0 \in (a,b)$ функция имела наибольшее или наименьшее значение, то выполнялось бы равенство $f'(x_0)=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ

В дальнейшем точки, в которых $f'(x_0)=0$, будем называть *стационарными.*

Теорема Ролля

Если функция $f(x)$:

непрерывна на $[a,b]$;

дифференцируема на (a,b);

$f(a)=f(b)$,

то существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, такая что $f'(c)=0$.

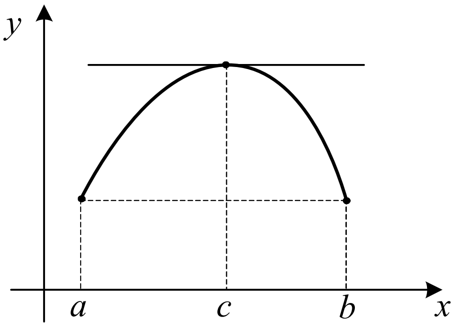


Рис. 6

Доказательство

1. Если функция тождественно равна постоянной, то теорема очевидна, так как $f'(x)=0$ на всем промежутке $[a,b]$.

2. Если функция $f(x)$ не равна тождественно постоянной, то она имеет на промежутке $[a,b]$ наибольшее и наименьшее значения. Так как $f(a)=f(b)$, то наибольшее или наименьшее значение достигается в какой-либо внутренней точке $c\in(a,b)$, а тогда по теореме Ферма $f'(c)=0$ (рис.6).

Теорема Лагранжа.

Если функция $f(x)$:

непрерывна на $[a,b]$;

дифференцируема на (a,b),

то существует точка $c\in(a,b)$, для которой выполняется условие $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство

Чтобы доказать эту теорему, построим функцию $F(x)=f(x)+\lambda x$ и подберем число λ так, чтобы эта функция удовлетворяла условиям теоремы Ролля.

Первые два условия выполнены, что ясно из вида функции. Чтобы было верным третье условие число λ должно определяться из соотношения $f(a)+\lambda\, a=f(b)+\lambda b$, из которого следует, что $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{a-b}$.

Тогда для функции $F(x)=f(x)+\dfrac{f(b)-f(a)}{a-b}x$, удовлетворяющей всем условиям теоремы Ролля, найдется точка $c\in(a;b)$, такая, что $F'(c)=0$. Поскольку $F'(c)=f'(c)+\dfrac{f(b)-f(a)}{a-b}$, то $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, или $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

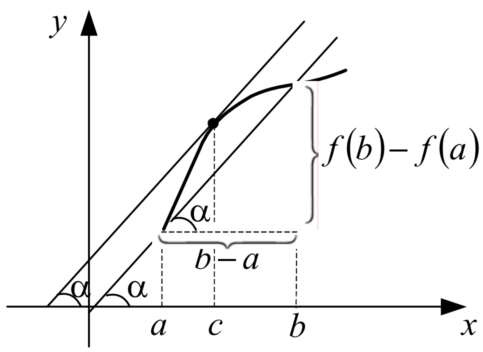


Рис.7

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что для непрерывной на промежутке $[a,b]$ и дифференцируемой, по крайней мере, во внутренних его точках функции всегда найдется точка $c\in(a,b)$, касательная в которой параллельна прямой, соединяющей точки графика функции с абсциссами a и b (рис.7).

Из рисунка 7 ясно, что $\operatorname{tg}\alpha=f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, откуда следует $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$.

Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемы в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и если выполняется условие $f(x_0)=g(x_0)=0$, причем $f'(x_0)\neq 0$ или $g'(x_0)\neq 0$, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Доказательство

Поскольку $f(x_0)=g(x_0)=0$, то отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно представить в виде $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$.

Обе функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лагранжа в окрестности $U_\delta(x_0)$. Тогда по теореме Лагранжа найдутся точка $c_1\in U_\delta(x_0)$ и точка $c_2\in U_\delta(x_0)$, такие, что для всех значений $x\in U_\delta(x_0)$ справедливо

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_1)(x-x_0),$$
$$g(x)-g(x_0)=g'(c_2)(x-x_0).$$

Тогда выражение под знаком предела можно представить в виде

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c_1)(x-x_0)}{f'(c_2)(x-x_0)}=\frac{f'(c_1)}{f'(c_2)},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(c_1)}{f'(c_2)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, так как при $x\to x_0$ выполняются условия $c_1\to x_0$ и $c_2\to x_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Можно доказать правило Лопиталя в общем виде

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Это замечание позволяет применять правило Лопиталя несколько раз, то есть для дважды дифференцируемых в окрестности $U_\delta(x_0)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ предел их отношения равен

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left[\tfrac{0}{0}\right]=\frac{f''(x_0)}{g''(x_0)},$$

в том случае, когда $f''(x_0)\neq 0$ или $g''(x_0)\neq 0$.

Если же $f''(x_0)=g''(x_0)=0$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ – трижды дифференцируемы в окрестности $U_\delta(x_0)$, то правило применяется еще раз, и так далее, до тех пор, пока не устранится неопределенность.

Пример 1

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+e^{-x}-1}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+e^{-x}-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x}}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+e^{-x}}{2}=\tfrac{1}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Правило Лопиталя справедливо и в том случае, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Пример 2

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$, используя правило Лопиталя.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}=\left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot 1}=1.$$

Пример 3

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}3x}$, используя правило Лопиталя.

Решение

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}3x}=\left[0^0\right]$. Такой вид неопределенности раскрывается с помощью основного логарифмического тождества. Представим сложно–показательную функцию под знаком предела в виде:

$$(\sin x)^{\operatorname{tg}3x}=e^{\ln\left((\sin x)^{\operatorname{tg}3x}\right)}=e^{\operatorname{tg}3x\cdot\ln(\sin x)}.$$

Затем вычислим предел показателя

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}3x\cdot\ln(\sin x))=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}3x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}3x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{3}{\sin^2 3x}}=-\tfrac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x\cdot\cos x}{\sin x}.$$

$\cos x\underset{x\to 0}{\to}1$, а бесконечно малые при $x\to 0$ функции $\sin^2 3x$ и $\sin x$ можно заменить под знаком предела эквивалентными бесконечно малыми функциями $(3x)^2$ и x. Учитывая это, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}3x}=-\tfrac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2\cdot 1}{x}=-\tfrac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{x}=-\tfrac{1}{3}\lim_{x\to 0}(9x)=0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}3x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\operatorname{tg}3x\ln\sin x}=e^0=1$.

2.2. Исследование функций и построение графиков

Исследование функций с помощью первой производной

Определение 1

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $[a,b]$, имеет в точке $x_0\in(a,b)$ локальный *максимум,* если существует окрестность $U_\delta(x_0)$, такая, что $f(x_0)>f(x)$ для всех $x\in\dot{U}_\delta(x_0)$.

Определение 2

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $[a,b]$, имеет в точке $x_0 \in (a,b)$ локальный *минимум,* если существует окрестность $U_\delta(x_0)$, такая, что $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Точки максимума и минимума функции называются точками *экстремума.*

Необходимое условие экстремума

Если дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то ее производная в точке x_0 равна нулю.

Доказательство

Функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ферма в окрестности $U_\delta(x_0)$. Тогда по теореме Ферма справедливо условие $f'(x_0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Условие равенства нулю производной является необходимым, но не достаточным. Примером этому может служить функция $y = x^3$. Ее производная $y' = 3x^2$ равна нулю в точке $x_0 = 0$. Однако функция всюду возрастает (рис.2) и не имеет экстремумов.

Для исследования функции на экстремум более важным является следствие из необходимого условия.

Следствие

Если производная дифференцируемой в точке x_0 функции отлична от нуля, то в точке x_0 нет экстремума.

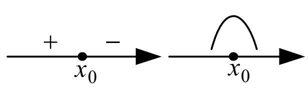
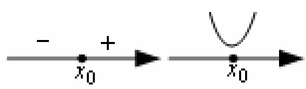
Определение 3

Точки, в которых производная заданной функции равна нулю, называются *стационарными.*

Из необходимого условия экстремума следует, что из всех точек дифференцируемости функции экстремум может быть только в стационарных точках. Чтобы выяснить будет ли в этих точках экстремум, необходимо использовать достаточное условие.

Достаточное условие экстремума

Если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, $f'(x_0) = 0$ и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум. При этом:

Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то этот экстремум - максимум (рис.8);	 Рис. 8
Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то этот экстремум - минимум (рис.9).	 Рис. 9

Доказательство

Пусть $f'(x_0)=0$ и пусть при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то есть

$$\begin{cases} f'(x)>0, & x<x_0 \\ f'(x)<0, & x>x_0 \end{cases} \text{для всех } x\in U_\delta(x_0).$$

На основании достаточных условий монотонности функции это означает, что для всех $x\in U_\delta(x_0)$ функция возрастает при $x<x_0$ и убывает при $x>x_0$. Тогда

$$\begin{cases} f(x)<f(x_0), & x<x_0 \\ f(x)<f(x_0), & x>x_0 \end{cases},$$

Следовательно, $f(x)<f(x_0)$ для всех $x\in \dot{U}_\delta(x_0)$, что согласно определению, означает, что точка x_0 – точка максимума функции.

Аналогично доказывается теорема, если производная при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс.

Пример 1

Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ на экстремум.

Решение

Заданная функция определена при всех значениях $x\neq 0$. Производная заданной функции равна $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}$, следовательно, функция дифференцируема на всей области определения.

Так как $f'(x)=0$ при $x=1$, то экстремум может быть только в точке $x=1$. Чтобы выяснить, есть ли в этой точке экстремум, надо выяснить меняет ли знак производная при переходе через эту точку (рис.10).

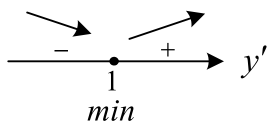


Рис. 10

Поскольку производная меняет знак в точке $x=1$ с минуса на плюс, то в этой точке заданная функция имеет минимум.

ЗАМЕЧАНИЕ *3*

Учитывая теорему о достаточном условии экстремума, можно определить точки экстремума, как точки, в которых меняется характер монотонности функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 4

Производная может менять знак и в точках разрыва, то есть в тех точках, в которых производная $f'(x)=\infty$ или не существует. Если эти точки входят в область определения функции, то они также являются точками ее экстремума, так как в них меняется характер монотонности. Точки экстремума, в которых производная $f'(x)=\infty$ или не существует, называются точками острого экстремума: *острого минимума и острого* максимума (рис11).

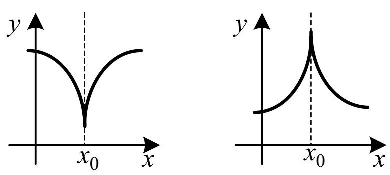


Рис. 11

ЗАМЕЧАНИЕ 5

Стационарные точки функции $f(x)$, а также точки, в которых производная $f'(x)=\infty$ или не существует, называются *критическими.* Только в этих точках следует искать экстремум функции. К критическим точкам относят также и точки разрыва функции, так как в этих точках может меняться характер ее монотонности.

Пример 2

Исследуйте функцию $y = x\sqrt[3]{(x-2)^2}$ на экстремум.

Решение

$$y' = \sqrt[3]{(x-2)^2} + x \cdot \tfrac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3(x-2)+2x}{3\sqrt[3]{x-2}} = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

$y'=0$ при $x_1=\frac{6}{5}$. $y'=\infty$ при $x_2=2$. Поскольку функция определена на всей числовой оси, то других критических точек нет. Отметим на числовой оси точки x_1 и x_2. Они разобьют числовую ось на три интервала. Выясним знак производной y' на каждом из полученных интервалов и по знаку производной определим характер монотонности функции (рис.12). Из рисунка ясно, что заданная функция имеет максимум в точке $x_1=\frac{6}{5}$ и острый минимум в точке $x_2=2$. На рисунке 12 показан график функции.

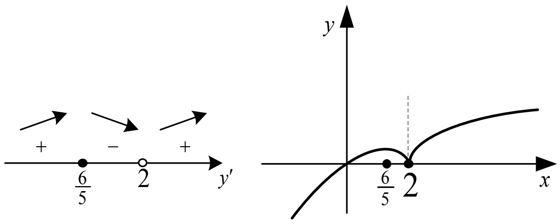


Рис. 12

Чтобы исследовать функцию на экстремум необходимо:

вычислить производную заданной функции;
найти все критические точки функции, включая точки разрыва функции;
нанести эти точки на числовую ось;
определить знак производной на каждом из полученных интервалов;
по знаку производной определить характер монотонности функции;
определить наличие экстремума и его характер в каждой критической точке, исключая точки разрыва функции.

Пример 3

Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ на экстремум.

Решение. $$y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

Критическими точками функции являются стационарные точки $x_1=3$ и $x_2=-1$, а также точка разрыва $x_3=1$. Отметим их на числовой оси и определим знак производной на каждом из полученных интервалах (рис.13).

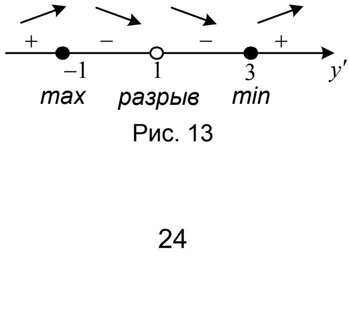


Рис. 13

Из рисунка ясно, что функция имеет максимум в точке $x_1 = -1$ и минимум в точке $x_2 = 3$. В точке разрыва характер монотонности не меняется.

Исследование функций с помощью второй производной. Точки перегиба

Определение 1

Функция $f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** (выпуклой) на промежутке (a,b), если ее график лежит выше касательной, проведенной в любой точке $x_0 \in (a, b)$ (рис.14 a).

Определение 2

Функция $f(x)$ называется ***выпуклой*** *вверх* (вогнутой) на промежутке (a,b), если ее график лежит ниже касательной, проведенной в любой точке $x_0 \in (a, b)$ (рис.14 b).

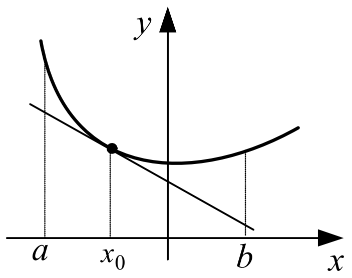


Рис. 14 a.

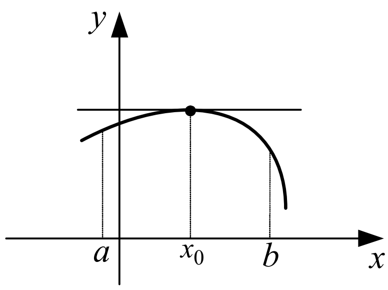


Рис. 14 b.

Теорема 1

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке (a,b) и вторая производная $f''(x) > 0$ для всех значений $x \in (a,b)$, то $f(x)$ выпукла вниз на промежутке (a,b).

Доказательство

1) Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Уравнение касательной к графику функции в этой точке имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Покажем, что в любой точке $x \in (a, b)$ график функции расположен выше этой касательной.

Рассмотрим любую точку $x \in (a, b)$, удовлетворяющую условию $x > x_0$, и вычислим разность ординат функции $(f(x))$ и касательной (y) в этой точке:

$$f(x) - y = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)) = (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Поскольку функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на промежутке (x_0, x), то найдется точка $c_1 \in (x_0, x)$, для которой справедливо равенство

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_1) \cdot (x - x_0).$$

Учитывая это, разность ординат функции и касательной в точке x можно представить в виде

$$f(x) - y = f'(c_1) \cdot (x - x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = (f'(c_1) - f'(x_0)) \cdot (x - x_0).$$

Производная $f'(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на промежутке (x_0, c_1). Значит, найдется точка $c_2 \in (x_0, c_1)$, для которой справедливо равенство

$$f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_1) \cdot (c_1 - x_0).$$

Учитывая это, разность ординат функции и касательной в точке x можно записать в виде

$$f(x) - y = f''(c_2) \cdot (c_1 - x_0) \cdot (x - x_0).$$

Так как $f''(x)>0$ при всех $x\in(a,b)$, а $x_0<c_2<c_1<x$ (рис.15), то $f''(c_2)>0$, $c_1-x_0>0$ и $x-x_0>0$. Следовательно, $f(x)-y>0$ и график функции в точке $x>x_0$ расположен выше касательной.

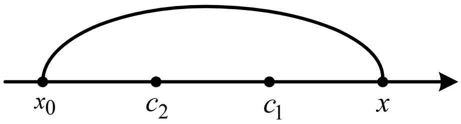


Рис. 15

2) Рассмотрим любую точку $x\in(a,b)$, удовлетворяющую условию $x<x_0$, и вычислим разность ординат функции $(f(x))$ и касательной (y) в этой точке:

$$f(x)-y=f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0))=(f(x)-f(x_0))-f'(x_0)\cdot(x-x_0)=$$
$$=-(f(x_0)-f(x))+f'(x_0)\cdot(x_0-x).$$

Поскольку функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на промежутке (x,x_0), то найдется точка $c_1\in(x,x_0)$, для которой справедливо равенство

$$f(x_0)-f(x)=f'(c_1)\cdot(x_0-x).$$

Учитывая это, разность ординат функции и касательной в точке x можно записать в виде

$$f(x)-y=-f'(c_1)\cdot(x_0-x)+f'(x_0)\cdot(x_0-x)=(f'(x_0)-f'(c_1))\cdot(x_0-x).$$

Производная $f'(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на промежутке (c_1,x_0). Значит, найдется точка $c_2\in(c_1,x_0)$, для которой справедливо равенство

$$f'(x_0)-f'(c_1)=f''(c_2)\cdot(x_0-c_1).$$

Учитывая это, разность ординат функции и касательной в точке x можно записать в виде

$$f(x)-y=f''(c_2)\cdot(x_0-c_1)\cdot(x_0-x).$$

Так как $f''(x)>0$ при всех $x\in(a,b)$, а $x<c_1<c_2<x_0$ (рис. 16), то $f''(c_2)>0$, $x_0-c_1>0$ и $x_0-x>0$. Следовательно, $f(x)-y>0$. Тогда график функции в точке $x<x_0$ также расположен выше касательной.

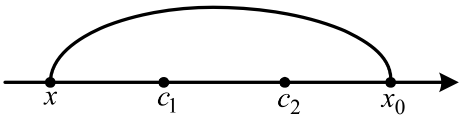


Рис. 16

Теорема 2

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке (a,b) и вторая производная $f''(x)<0$ для всех $x\in(a,b)$, то $f(x)$ на промежутке (a,b) выпукла вверх.

Доказательство

аналогично доказательству теоремы 1.

Определение 3

Точки, в которых меняется характер выпуклости функции, называются *точками перегиба.*

Теорема 3

Если $f''(x_0)=0$ и $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 перегиб.

ЗАМЕЧАНИЕ

Вторая производная может менять знак и в точке разрыва. Поэтому точками перегиба являются точки, в которых вторая производная обращается в ноль или бесконечна (а функция определена) и меняет знак.

Чтобы найти точки перегиба графика функции нужно:

- вычислить вторую производную заданной функции;
- найти все точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует;
- нанести эти точки, а также точки разрыва функции на числовую ось;
- определить знак второй производной на каждом из полученных интервалов;
- по знаку второй производной определить характер выпуклости функции;
- точками перегиба будут те точки, в которых меняется характер выпуклости функции, исключая точки разрыва.

Пример 1

Определите точки перегиба графика функции $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

Решение

Первая производная заданной функции равна $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$. Исследуя первую производную легко убедиться, что функция имеет минимум в точке $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Теперь вычислим вторую производную

$$y''=2\cdot\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=2\cdot\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot(1-x)\cdot(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

и исследуем ее. Вторая производная меняет знак в точках $x=\pm 1$. По знаку второй производной y'' можно выяснить характер выпуклости функции (рис. 17).

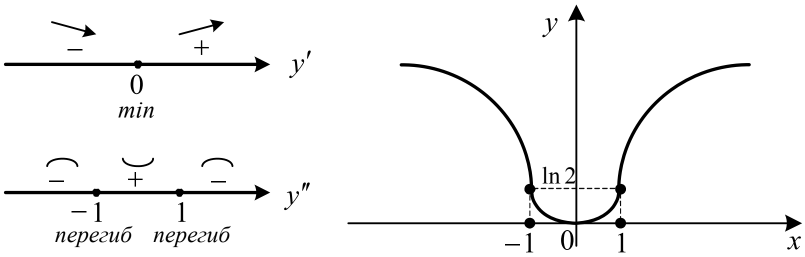


Рис. 17

Из рисунка видно, что функция имеет две точки перегиба $\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\ln 2 \end{cases}$. На рисунке 17 показан график заданной функции.

Пример 2

Исследуйте характер выпуклости графика функции $y=\sqrt[3]{x^5}$ и найдите точки перегиба.

Решение

Поскольку первая производная функции $y=\left(\sqrt[3]{x^5}\right)'=\left(x^{\frac{5}{3}}\right)'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ всюду положительна, то функция возрастает при всех значениях x.

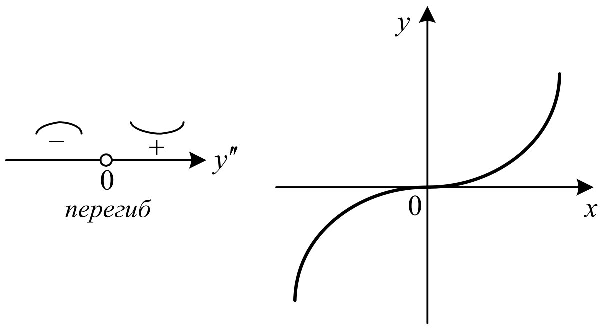


Рис. 18

Вычислим вторую производную $y'' = \left(\frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{10}{9} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. Вторая производная не существует при $x = 0$ и меняет знак в этой точке (рис.18). Поскольку функция определена на всей числовой оси, то $x = 0$ - точка перегиба. График функции показан на рисунке 18.

Асимптоты графика функции.

Определение 1

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Из определения вертикальной асимптоты следует, что вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой справа или слева.*

Пример 1

Найдите вертикальные асимптоты графика функции $y = \frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$.

Решение

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \infty, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \infty,$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} = \infty.$$

Из этого следует, что прямые $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$ являются вертикальными асимптотами графика функции. Чтобы выяснить поведение функции вблизи вертикальных асимптот, исследуем заданную функцию на знак.

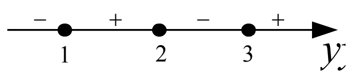


Рис. 19

Из рисунка 19 можно определить знаки бесконечных пределов.

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x \to 2-0} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x\to 3-0} f(x) = -\infty .$$

Легко выяснить, что $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Эскиз графика функции можно построить, не проводя исследования функции на экстремум и не выясняя характер ее выпуклости (рис.20).

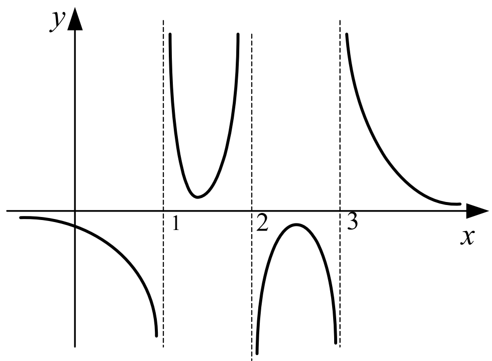


Рис. 20

Определение 2

График функции $y = f(x)$ имеет *наклонную асимптоту* вида $y = kx + b$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0.$

Теорема

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существуют и конечны пределы:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases}.$$

Доказательство

1) Пусть прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$. Тогда по определению наклонной асимптоты справедливо

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0 .$$

Разделив выражение под знаком предела на x, получим

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0 \text{, или } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k .$$

Так как $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, то $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$

2) Пусть $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$, где $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Тогда функция $f(x) - kx - b$ является бесконечно малой при $x \to \pm\infty$. Из этого следует, что $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, а это означает, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Если $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k = 0$, то уравнение наклонной асимптоты принимает вид $y = b$. Такая асимптота называется *горизонтальной.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Функция может вести себя по-разному вблизи наклонной асимптоты:

- она может иметь одну и ту же наклонную асимптоту при $x \to \pm\infty$ (рис.21 a);
- она может иметь разные наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (рис.21 b);
- она может иметь наклонную асимптоту только при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ (рис. 21 с).

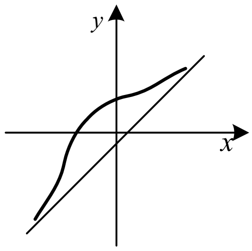


Рис. 21 а

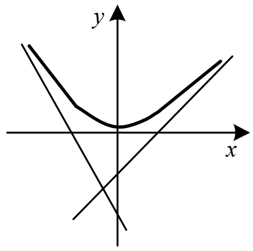


Рис. 21 b

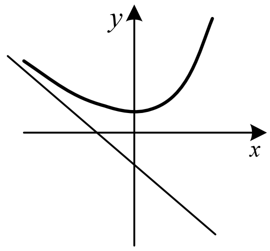


Рис. 21 с

Пример 2

Найдите асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + 4}$.

Решение

Заданная функция определена и непрерывна на всей числовой оси, следовательно, ее график не имеет вертикальных асимптот.

Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x + 1}{(e^x + 4)\cdot x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^x = \left[\begin{array}{l} \infty, x \to +\infty \\ 0, x \to -\infty \end{array}\right.$, то асимптоты разные при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Поэтому

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 1}{(e^x + 4)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x \cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

При $x \to +\infty$ график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 1}{(e^x + 4)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4 \cdot x} = 0.\ b_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2 x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 4} = \tfrac{1}{4}.$$

При $x \to -\infty$ график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{1}{4}$. График функции показан на рисунке 22.

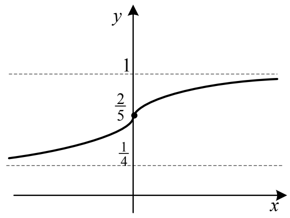


Рис. 22

Пример 3

Проведите полное исследование функции $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$ и постройте ее график.

Решение

Проведем исследование заданной функции по следующей схеме.

Область определения функции (ООФ) и вертикальные асимптоты.

О.О.Ф.: $x \neq 2$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$, то прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота.

Четность функции, периодичность функции.

Функция общего вида и непериодическая.

Корни и знаки функции.

Корень функции $x = 1$. Функция неотрицательна при всех значениях x.

Монотонность функции. Экстремумы.

Вычислим первую производную функции.

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{x-2} \right) \cdot \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = \frac{-2 \cdot (x-1)}{(x-2)^3}.$$

Отметим на числовой оси стационарную точку, $x = 1$ и точку разрыва функции $x = 2$. Определим знак первой производной на каждом из полученных интервалов и отметим стрелками характер монотонности функции (рис.23).

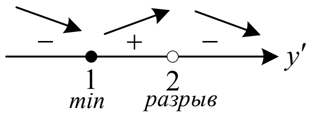


Рис. 23

Из рисунка 23 ясно, что $x = 1$ – точка минимума. Для построения графика требуется найти значение функции в точке минимума: $f(1) = 0$. В точке разрыва меняется характер монотонности функции.

Выпуклость функции. Точки перегиба.

Вычислим вторую производную заданной функции.

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(x-2)^3 - (x-1) \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6} = = -2 \cdot \frac{x-2-3x+3}{(x-2)^4} = 2 \cdot \frac{2x-1}{(x-2)^4}.$$

Вторая производная обращается в ноль в точке $x = \frac{1}{2}$ и меняет знак. Это точка перегиба. В точке разрыва $x = 2$ вторая производная знак не меняет. Определим знак второй производной на всей числовой оси и отметим на ней характер выпуклости функции (рис.24).

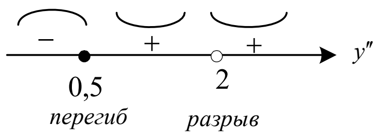


Рис. 24

Значение функции в точке перегиба $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}$.

Наклонные (горизонтальные) асимптоты.

Выясним, имеет ли функция наклонную асимптоту вида $y = kx + b$. Для этого вычислим пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)^2}{x \cdot (x-2)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Следовательно, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

Введем прямоугольную декартову систему координат. Для того, чтобы построить график исследованной функции, нужно:

- провести вертикальные и наклонные асимптоты;
- отметить все характерные точки (корни, точки экстремума, точки перегиба);

- соединить характерные точки кривыми в соответствии с исследованием функции на выпуклость.

График заданной функции построен на рисунке 25.

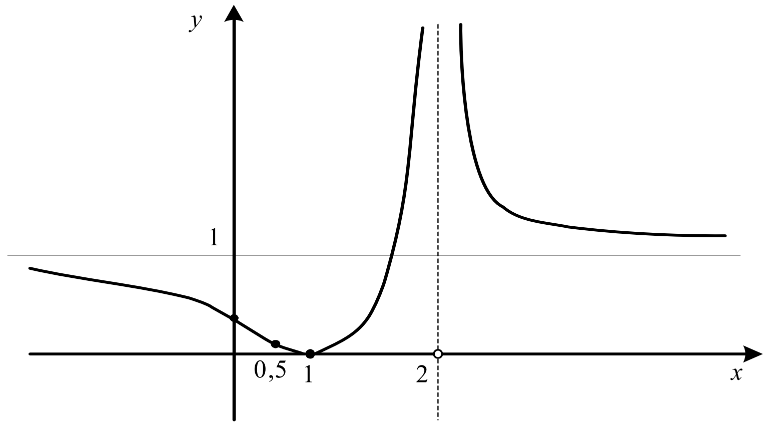


Рис. 25

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на замкнутом промежутке функции

Функция, непрерывная на замкнутом промежутке принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения могут достигаться в точках экстремума и острого экстремума, а также на концах промежутка.

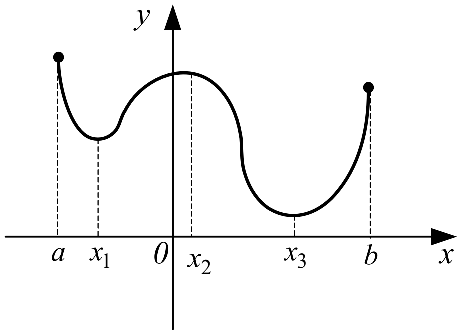


Рис. 26

Функция, график которой показан на рисунке 26, достигает наибольшего значения на левом конце промежутка в точке $x = a$ и наименьшего – в точке минимума x_3.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a; b]$ нужно:

- найти все ее критические точки;
- вычислить значения функции во всех критических точках;
- вычислить значения $f(a)$ и $f(b)$;
- среди полученных чисел найти самое большое и самое маленькое.

Пример

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \sqrt[3]{x^2}$ на промежутке $[-8, 8]$.

Решение

Заданная функция непрерывна на всей числовой оси. Производная функции равна

$$f'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная $f'(x)=0$ при $x=\pm 1$ и производная $f'(x)$ не существует при $x=0$. Вычислим значения функции в этих точках: $f(\pm 1)=-\frac{2}{3}$. $f(0)=0$. Значения функции на концах заданного промежутка равны: $f(\pm 8)=17\frac{1}{3}$.

Следовательно, наибольшее значение функции равно $17\frac{1}{3}$ при $x=\pm 8$, наименьшее значение функции равно $-\frac{2}{3}$ при $x=\pm 1$.

2.3. Формула Тейлора и ее применение. Исследование функций с помощью производных высших порядков

Многочлен Тейлора

Нами уже говорилось, что многочленом n – й степени относительно переменной x называется многочлен вида

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n.$$

Многочлен вида

$$T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n.$$

также является многочленом n - й степени относительно переменной x. Если раскрыть все скобки и привести подобные члены, то его можно привести к виду, в котором записан многочлен $P_n(x)$. Многочлен $T_n(x)$ в отличие от многочлена $P_n(x)$ называют многочленом n - й степени относительно переменной x, записанным по степеням $x-x_0$.

Определение

Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0. Многочлен n – й степени относительно переменной x, записанный по степеням $x-x_0$, называется *многочленом Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0, если: в этой точке равны значения функции $f(x)$ и многочлена $T_n(x)$, а также значения всех их производных до производных n – го порядка.

Из определения следует, что многочлен вида

$$T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n$$

является многочленом Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0, если выполняются равенства:

$$T_n(x_0)=f(x_0);\ T_n{}'(x_0)=f'(x_0);\ ...;\ T_n{}^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

На основании определения можно получить формулы для коэффициентов $a_0, a_1,..., a_n$ многочлена Тейлора.

Теорема

Если многочлен

$$T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n$$

является многочленом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0, то его коэффициенты $a_0, a_1,..., a_n$ определяются по формулам:

$$a_0=f(x_0);\ a_1=f'(x_0);\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!};......;\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Доказательство.

Так как $T_n(x_0)=a_0$ и $T_n(x_0)=f(x_0)$, то $a_0=f(x_0)$.

Вычислим производную от многочлена Тейлора

$$T_n'(x)=a_1+a_2\cdot 2\cdot(x-x_0)+a_3\cdot 3\cdot(x-x_0)^2+...$$

и подставим в это равенство $x=x_0$. Получим $T_n'(x_0)=a_1$.

Поскольку из определения многочлена Тейлора следует, что должно быть выполнено условие $T_n'(x_0)=f'(x_0)$, то

$$a_1=f'(x_0).$$

Вычислим вторую производную от многочлена Тейлора

$$T_n''(x)=2\cdot a_2+a_3\cdot 3\cdot 2\cdot(x-x_0)+a_4\cdot 4\cdot 3\cdot(x-x_0)^2+...$$

Подставив в это равенство $x=x_0$, получим, что $T_n''(x_0)=2a_2$. Так как для многочлена Тейлора справедливо $T_n''(x_0)=f''(x_0)$, то $2a_2=f''(x_0)$, откуда следует, что

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2}=\frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Вычислим третью производную от многочлена Тейлора

$$T_n'''(x)=a_3\cdot 3\cdot 2+a_4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\,(x-x_0)+...$$

и подставим в нее $x=x_0$. Получим $T_n'''(x_0)=3\cdot 2a_3$. Так как должно быть выполнено условие $T_n'''(x_0)=f'''(x_0)$, то $3\cdot 2\cdot a_3=f'''(x_0)$, откуда следует, что

$$a_3=\frac{f'''(x_0)}{3\cdot 2}=\frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Последовательно дифференцируя n раз многочлен Тейлора и подставляя в вычисленную производную $x=x_0$, получим формулу для коэффициента a_n при любом значении n:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Формулы Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и пусть $T_n(x)$ – ее многочлен Тейлора в точке x_0. Если обозначить $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$, то функцию $f(x)$ в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 можно представить формулой:

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x) \qquad (1)$$

или

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \quad (2)$$

Определение 1

Формула (1) или (2) называются *формулами Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0, а выражение $R_n(x)$ – *остаточным членом* формулы Тейлора.

Теорема.

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x)=0$$

Доказательство

очевидно, так как $f(x_0)=T_n(x_0)$, а функция $f(x)$ так же, как и ее многочлен Тейлора, непрерывны. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-T_n(x)\right)=f(x_0)-T_n(x_0)=0 .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Можно доказать, что остаточный член $R_n(x)$ при $x\to x_0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$. Это записывается в следующем виде: $R_n(x)=\vartheta\left((x-x_0)^n\right)$. Подобная форма записи остаточного члена формулы Тейлора называется остаточным членом *в форме Пеано.*

Используя форму Пеано для остаточного члена, можно записать формулу Тейлора в следующем виде.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\dots\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\vartheta\left((x-x_0)^n\right).$$

Определение 2

Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности $U_\delta(0)$ точки $x=0$. Формула

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\vartheta\left(x^n\right),$$

называется *формулой Маклорена.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Из определения ясно, что формула Маклорена получится из формулы Тейлора, если положить $x_0=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3

Можно доказать, что остаточный член формулы Тейлора имеет вид: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $x_0<\theta<x$. Такая форма записи остаточного члена называется остаточным членом *в форме Лагранжа.*

Формула Маклорена для основных элементарных функций

1. $f(x)=e^x$.

Поскольку $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n)}(0)=1$, то $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\vartheta\left(x^n\right)$.

2. $f(x)=\sin x$. $f(0)=0$.

Так как $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$, то все производные четного порядка в точке x_0 равны нулю, а производные нечетного порядка равны ±1, причем знаки чередуются. Поскольку $(\sin x)'=\cos x$, то $f'(0)=\cos 0=1>0$, то есть перед первым членом в формуле знак +. Учитывая все это формулу Маклорена для заданной функции можно записать в виде:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\vartheta\left(x^{2n-1}\right);$$

3. $f(x)=\cos x$

$f(0)=1$. Поскольку $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$, то $f^{(2n+1)}(0)=0$, $f^{(2n)}(0)=\pm1$ для любых значений n. При этом вторая производная $f''(0)=-\cos 0=-1$. Значит, все производные порядка $2n$ равны –1, а все производные порядка $4n$ равны 1. Формула Маклорена для функции $f(x)=\cos x$ имеет вид:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\vartheta\left(x^{2n}\right).$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$.

$f(0)=\ln 1=0$. Поскольку $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^{n+1}}$, то $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$. Тогда формулу Маклорена для функции $f(x)=\ln(1+x)$ можно записать в виде

$$\ln(x+1)=x-\frac{1!}{2!}x^2+\frac{2!}{3!}x^3-\frac{3!}{4!}x^4+...+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n+\vartheta\left(x^n\right),$$ или

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\vartheta\left(x^n\right).$$

Пример 1

Представьте функцию $f(x)=e^{-x^2}$ формулой Маклорена.

Решение

Формула Маклорена для функции $f(x)=e^x$ имеет вид $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\vartheta\left(x^n\right)$. Чтобы получить формулу Маклорена для заданной функции, нужно x заменить на $-x^2$.

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!}+\vartheta\left(x^{2n}\right).$$

Пример 2

Представьте функцию $f(x)=\ln x$ формулой Тейлора в точке $x_0=1$.

Решение

Сделаем замену $y=x-1$, тогда $x=1+y$ и $\ln x=\ln(1+y)$. Функцию $\ln(1+y)$ представим формулой Маклорена. Тогда

$$\ln(y+1)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n}+\vartheta\left(x^n\right).$$

Заменяя в последней формуле $y=x-1$, получим формулу Тейлора для функции $f(x)=\ln x$ в точке $x_0=1$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\vartheta\left(x^n\right).$$

Применение формул Тейлора и Маклорена

Пример 1

Вычислить предел, используя формулу Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\sin\left(x^2\right)-\cos 2x}{x^3\sin x}.$$

Решение

Представим следующие функции формулой Маклорена

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\vartheta\left(x^6\right),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\vartheta\left(x^5\right),$$

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \vartheta\left(x^6\right),$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{64x^6}{6!} + \vartheta\left(x^6\right),$$

под знаком предела, ограничиваясь при этом членами со степенями не выше, чем x^4. Тогда это выражение можно преобразовать так, чтобы предел легко вычислялся.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \sin\left(x^2\right) - \cos 2x}{x^3 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - x^2 - 1 + 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \vartheta\left(x^4\right)}{x^3 \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \vartheta\left(x^4\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2} - \frac{2x^4}{3} + \vartheta\left(x^4\right)}{x^4 + \vartheta\left(x^4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{6} + \vartheta\left(x^4\right)}{x^4 + \vartheta\left(x^4\right)} = -\frac{1}{6}.$$

Пример 2

Вычислить предел, используя формулу Маклорена

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1 + 0{,}5x^2 + 2x^4}{x^4}.$$

Решение

По формуле Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \vartheta\left(x^3\right) = x - \frac{x^3}{6} + \vartheta\left(x^3\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \vartheta\left(x^4\right).$$

Подставляя выражение для функции $\sin x$ в формулу Маклорена для $\cos x$, получим

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4}{4!} + \vartheta\left(x^4\right), \text{ или}$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{72} + \frac{x^4}{24} + \vartheta\left(x^4\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \vartheta\left(x^4\right).$$

Теперь можно вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1 + 0{,}5x^2 + 2x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \vartheta\left(x^4\right) - 1 + 0{,}5x^2 + 2x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{53}{24}x^4}{x^4} = \frac{53}{24}.$$

Пример 3

Вычислить $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение

Поскольку $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}} = e^{-0{,}25}$, то требуется вычислить значение функции $f(x) = e^x$ в точке $x = -0{,}25$. Используем для вычислений формулу Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \vartheta\left(x^n\right),$$

подставляя в нее $x = -0{,}25$ и ограничившись членами четвертого порядка.

$$e^{-0,25}=1-\frac{0,25}{1!}+\frac{(-0,25)^2}{2!}+\frac{(-0,25)^3}{3!}+\frac{(-0,25)^4}{4!}+\vartheta\left(x^4\right).$$

Проведя вычисления, получим

$$e^{-0,25}\approx 1-0,25+\frac{0,0625}{2}-\frac{0,0156}{6}+\frac{0,0039}{24}.$$

Из оценки величины остаточного члена $R_5 \le 0,00097$ ясно, что вычисления проводятся с точностью не большей, чем $\varepsilon=0,001$. Поэтому

$$e^{-0,25}\approx 0,75+0,03125-0,00753+0,0016=0,7753.$$

Исследование функций с помощью производных высших порядков

Теорема

Если функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 и все ее производные до производной n – го порядка в этой точке равны нулю, то есть $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=0$, а $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, то:

если $n+1$ – нечетное число $\Rightarrow$ в точке x_0 перегиб;

если $n+1$ – четное число $\Rightarrow$ в точке x_0 экстремум.

Если при четном $n+1$:

$f^{(n+1)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ – точка максимума;

$f^{(n+1)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ – точка минимума.

Доказательство

Представим функцию в окрестности точки x_0 формулой Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+...$$
$$...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}+\vartheta\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Так как $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=0$, то формула примет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{(n+1)}+\vartheta\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Учитывая это и используя форму Лагранжа для записи остаточного члена, получим

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{(n+1)}+\frac{f^{(n+2)}(\theta)}{(n+2)!}\cdot(x-x_0)^{(n+2)},$$

где $x_0<\theta<x$. Проведем некоторые упрощения

$$f(x)-f(x_0)=\left(f^{(n+1)}(x_0)+f^{(n+2)}(\theta)\cdot\frac{x-x_0}{n+2}\right)\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \qquad (1)$$

и сделаем замену

$$x-x_0=t, \qquad f(x)-f(x_0)=z,$$

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)+f^{(n+2)}(\theta)\dfrac{x-x_0}{n+2}}{(n+1)!}=a.$$

Ясно, что в достаточно малой окрестности $U_\delta(x_0)$ при больших значениях n знак a определяется знаком производной $f^{(n+1)}(x_0)$. Учитывая сделанную замену, равенство (1) перепишем в переменных z и t.

$$z = a \cdot t^{n+1}.$$

В достаточно малой окрестности $U_\delta(x_0)$ исследуемая функция ведет себя так же, как и степенная функция $z = a\, t^{n+1}$ в окрестности точки $t = 0$. В зависимости от четности показателя степени $n+1$ и от знака коэффициента a (рис.27), можно сделать вывод:

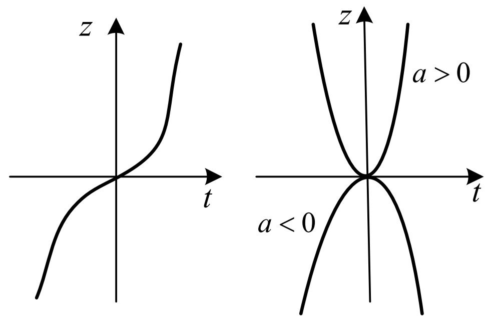


Рис. 27 a Рис. 27 b

если число $n+1$ - нечетное, то в точке $t = 0$ перегиб (рис.27 a);

если число $n+1$ – четное, то в точке $t = 0$ экстремум; максимум при $a < 0$ и минимум при $a > 0$ (рис.27 b).

Пример

Исследуйте поведение функции $f(x) = xe^x - \sin(x^2) - \frac{1}{2}x^3 - x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение

$$f'(x) = e^x + xe^x - \cos(x^2)2x - \tfrac{3}{2}x^2 - 1 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x + \sin(x^2)4x^2 - 2\cos(x^2) - \tfrac{3}{2}2x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2e^x + e^x + xe^x + \cos(x^2)8x^3 + \sin(x^2)8x + 2\sin(x^2)2x - 3 \Rightarrow f'''(0) = 0.$$

Упростим третью производную и продифференцируем функцию еще раз:

$$f'''(x) = 3e^x + xe^x + \cos(x^2)8x^3 + 12x\sin(x^2) - 3.$$

$$f^{IV}(x) = 3e^x + e^x + xe^x - \sin(x^2)16x^4 + \cos(x^2)24x^2 + 12\sin(x^2) + 12x\cos(x^2)2x.$$

Поскольку $f^{IV}(0) = 4 > 0$, то функция имеет в точке $x = 0$ минимум.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Что называется дифференциалом функции $y = f(x)$?
2. Какому условию должна удовлетворять функция в точке x_0, чтобы в этой точке был определен ее дифференциал?
3. В чем состоит геометрический смысл первого дифференциала?
4. Как выглядит формула для вычисления первого дифференциала?
5. По какому правилу вычисляется дифференциал суммы двух функций?
6. По какому правилу вычисляется дифференциал произведения двух функций?
7. По какому правилу вычисляется дифференциал частного двух функций?
8. Как может быть записана формула для первой производной функции $y = f(x)$ с помощью дифференциала?
9. По какой формуле вычисляется производная функции, заданной параметрически?
10. Как связаны приращение и дифференциал функции?
11. От каких переменных зависит дифференциал?
12. Для каких функций дифференциал совпадает с приращением?
13. Как определяется производная второго порядка?
14. Каков механический смысл производных первого и второго порядка?

15. Что называется дифференциалом второго порядка?
16. Что такое инвариантность формулы первого дифференциала?
17. Имеет ли место инвариантность формулы дифференциала второго порядка?
18. Как выглядит формула для вычисления дифференциала n – го порядка для функции $y = f(x)$, если x – независимая переменная?
19. Какая функция называется возрастающей? Неубывающей?
20. Какая функция называется убывающей? Не возрастающей?
21. Как связаны монотонность функции и знак ее первой производной?
22. Какой геометрический смысл имеет теорема Лагранжа?
23. Обязательно ли требование дифференцируемости функции во всех внутренних точках в теореме Лагранжа? Почему?
24. Какой геометрический смысл имеет теорема Ролля?
25. Обязательно ли требование дифференцируемости функции во всех внутренних точках в теореме Ролля? Почему?
26. Для раскрытия каких неопределенностей можно использовать правило Лопиталя?
27. Можно ли использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $[0 \cdot \infty]$? Как при этом следует представить заданную функцию?
28. Можно ли использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left[0^0\right]$? Чем при этом следует пользоваться?
29. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум. Что это означает по определению?
30. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум. Что это означает по определению?
31. Какое условие является необходимым для существования экстремума в точке x_0?
32. Какие точки называются критическими для функции $f(x)$?
33. Имеет ли функция в точке x_0 экстремум, если ее производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс? Если имеет, то какой это экстремум?
34. Имеет ли функция в точке x_0 экстремум, если ее производная в этой точке меняет знак с плюса на минус? Если имеет, то какой это экстремум?
35. Может ли функция иметь экстремум в точке x_0, если она не дифференцируема в этой точке? Как называется подобный экстремум?
36. Как называется точка, в которой функция меняет характер монотонности?
37. Какая функция называется выпуклой вниз на промежутке (a, b)?
38. Какая функция называется выпуклой вверх на промежутке (a, b)?
39. Как связан знак второй производной функции с характером ее выпуклости?
40. Как называется точка, в которой меняется характер выпуклости функции?
41. Каково необходимое условие того, что точка x_0 является точкой перегиба графика функции $f(x)$?
42. Каково достаточное условие того, что точка x_0 является точкой перегиба графика функции $f(x)$?
43. Может ли функция иметь перегиб в точке, в которой ее вторая производная не определена?
44. При каком условии прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$?
45. При каком условии прямая $y = kx + b$ является наклонной (горизонтальной) асимптотой графика функции $f(x)$?
46. Какая формула называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0?
47. Какой вид имеет формула Маклорена для функции $f(x)$?
48. Что называется остаточным членом формулы Тейлора?

49. Как ведет себя остаточный член формулы Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 при $x \to x_0$?

50. Какой вид будет иметь формула Маклорена для многочлена $P_n(x)$?

51. Можно ли представить функцию $y = \ln x$ формулой Маклорена?

52. Можно ли представить функцию $y = |x|$ формулой Тейлора в окрестности точки $x = 1$? Если да, то какой вид она должна иметь?

53. Можно ли представить функцию $y = \frac{1}{x}$ формулой Маклорена?

54. Как исследуется поведение функции в окрестности некоторой точки с помощью производных высших порядков?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Формула дифференциала и ее инвариантность.

2. Правила дифференцирования. Дифференциал сложной функции. Дифференцирование неявной и параметрически заданной функций.

3. Производные и дифференциалы высших порядков.

4. Монотонная функция. Необходимые условия возрастания и убывания функции.

5. Монотонная функция. Достаточные условия возрастания и убывания функции.

6. Теорема Ферма. Теорема Ролля.

7. Теорема Лагранжа и ее геометрический смысл. Правило Лопиталя.

8. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке.

9. Определение экстремума (максимума и минимума). Необходимое условие экстремума.

10. Достаточные условия экстремума. Исследование функций на экстремум с помощью первой производной. Критические точки.

11. Выпуклость функции. Достаточные условия выпуклости функции. Точки перегиба.

12. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

13. Многочлен Тейлора для функции $f(x)$.

14. Формула Тейлора и Маклорена для функции $f(x)$. Остаточный член формулы Тейлора.

15. Формула Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.

16. Исследование функций с помощью производных высших порядков.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 2 (12 часов)

1. Дифференциал функции. Правила дифференцирования. Дифференциал сложной функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически (2 часа). **Типовой расчет по темам: «Производная» и «Функции многих переменных»**.
   Л.З.: 884, 889(17-22), 900,901, 806. 809, 811, 846, 862, 841 – 844, 963
2. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков (2 часа).
   Л.З.: 1019, 1026, 1030, 1034, 1056, 1058, 1062, 1070, 1071.
3. Вычисление пределов функций с помощью правила Лопиталя и формулы Тейлора (2 часа).
   Л.З.: 1332, 1335, 1338, 1341, 1344, 1351, 1358, 1355, 1359, 1365.
4. Исследование функций и построение графиков (2 часа).
   Л.З.: 1407, 1408, 1413, 1418, 1411, 1424, 1434.
5. Наибольшее и наименьшее значения функций. Исследование функций с помощью производных высших порядков (2 часа).
   Л.З.: 1185, 1188, 1191, 1196, 1514, 1518.