Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический
университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

Н.В.Васильева

Тема 10. **Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля**

Компендиум по дисциплине «Математика»

Санкт-Петербург
2006

ББК 22.161
УДК 517.50
Н.В.Васильева. Высшая математика. Тема 10. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля.. Учеб. Пособие. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2006*. с.* 140.
Ил. 52. Табл. 23 . Библиогр.: 6 назв.

Настоящее издание адресовано студентам инженерных специальностей для организации их самостоятельной работы. Оно содержит тематический план, выписки из календарных планов лекций и практических занятий по теме «Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля», теоретический материал по этой теме, контрольные вопросы по теории и вопросы для подготовки к экзамену. Для самоконтроля полученных знаний в пособие введен тест, в котором представлены тестовые задания с выбором ответа, сформулированные на основе требуемого набора знаний и умений по изучаемой теме. В конце пособия дан список рекомендуемой литературы и ответы к тесту.

Работа выполнена по заказу и при поддержке факультета целевой и контрактной подготовки специалистов СПбГМТУ.

Н.В.Васильева

Тема 10. ИТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Компендиум по дисциплине «Математика»

Редактор И.Н.Фишкина

ISBN©

СПбГМТУ, 2006

СОДЕРЖАНИЕ КОМПЕНДИУМА

1. Тематический план 3 –го семестра.
2. Выписка из календарного плана лекций
3. Теоретический материал.
4. Контрольные вопросы по теории.
5. Вопросы для подготовки к экзамену.
6. Выписка из календарного плана практических занятий.
7. Тест по теме 10 «Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля».
8. Рекомендуемая литература.
9. Ответы к тесту.

1. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 3 СЕМЕСТРА

Таблица 1. Тематический план

	Название темы	Распределение часов				
		Всего	Аудиторные занятия			Самост. работа
			Всего аудитор-ных	Из них		
				Лекции	Практ. занятия	
8	Ряды. Часть 2. Ряды Фурье.	24	14	4	10	10
9	Дифференциальные уравнения.	54	34	14	20	20
10	Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля.	66	42	18	24	24
Всего за 3 семестр		144	90	36	54	54

2. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ЛЕКЦИЙ

10. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля. (18 часов).

10. Области в арифметическом пространстве. Двойной интеграл. Его свойства, геометрический и механический смысл. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

11. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных и эллиптических координатах. Механические приложения двойного интеграла.

12. Тройной интеграл. Его геометрический и механический смысл. Вычисление в декартовых координатах.

13. Сферическая система координат. Выражение элемента объема. Замена переменных в тройном интеграле. Приложения тройного интеграла.

14. Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства, вычисление и приложения. Поверхностный интеграл первого рода. Его свойства, вычисление и приложения.

15. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Его свойства и физический смысл. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока в поле скоростей жидкости. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства и вычисление.

16. Дивергенция векторного поля. Формула Гаусса-Остроградского и ее использование для вычисления потока. Физический смысл дивергенции. Соленоидальное поле.

17. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля. Криволинейный интеграл второго рода, его свойства и вычисление. Формула Стокса и ее использование для вычисления циркуляции. Ротор векторного поля, его физический смысл. Безвихревое поле.

18. Потенциальное поле, потенциал. Вычисление криволинейного интеграла второго рода в потенциальном поле. Работа как разность потенциалов. Оператор Гамильтона, его использование для выражения градиента, дивергенции, ротора. Операции второго порядка в векторном анализе.

19. Резервная лекция.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Таблица 2. Содержание

1. Кратные интегралы.
1.1. Области. Мера области. Диаметр области. Ранг дробления. Интеграл по области.
1.2. Двойной интеграл.
1.2.1.Определение, геометрический и механический смысл двойного интеграла. Теорема существования.
1.2.2. Свойства двойного интеграла.
1.2.3. Двойной интеграл в декартовых координатах.
1.2.4. Повторный интеграл и его вычисление.
1.2.5. Замена переменных в двойном интеграле.
1.2.6. Двойной интеграл в полярных координатах.
1.2.7. Эллиптические координаты.
1.2.8. Механические приложения двойного интеграла.
1.3. Тройной интеграл.
1.3.1. Определение тройного интеграла. Теорема существования.
1.3.2. Механический и геометрический смысл тройного интеграла.
1.3.3. Свойства тройного интеграла.
1.3.4. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
1.3.5. Замена переменных в тройном интеграле.
1.3.6. Тройной интеграл в сферических координатах.
1.3.7. Механические приложения тройного интеграла.
2. Криволинейные и поверхностные интегралы 1 рода.
2.1. Криволинейный интеграл 1 рода.
2.1.1. Определение, геометрический и механический смысл криволинейного интеграла 1 рода. Теорема существования.

2.1.2. Свойства криволинейного интеграла 1 рода.
2.1.3. Вычисление криволинейного интеграла 1 рода.
2.1.4. Механические приложения криволинейного интеграла 1 рода.
2.2. Поверхностный интеграл 1 рода.
2.2.1. Определение поверхностного интеграла 1 рода. Теорема существования.
2.2.2. Геометрический и механический смысл поверхностного интеграла 1 рода.
2.2.3. Свойства поверхностного интеграла 1 рода.
2.2.4. Вычисление поверхностного интеграла 1 рода.
2.2.5. Механические приложения поверхностного интеграла 1 рода.
3. Теория поля.
3.1. Скалярное поле.
3.1.1. Линии и поверхности уровня скалярного поля.
3.1.2. Производная по направлению.
3.1.3. Формула для производной по направлению.
3.1.4. Градиент.
3.1.5. Свойства градиента.
3.2. Векторное поле.
3.2.1. Векторная функция скалярного аргумента.
3.2.2. Производная векторной функции скалярного аргумента.
3.2.3. Векторное поле. Векторные линии.
3.2.4. Криволинейный интеграл 2 рода.
3.2.5. Работа в векторном поле.
3.2.6. Свойства криволинейного интеграла 2 рода.
3.2.7. Криволинейный интеграл 2 рода на плоскости.
3.2.8. Формула Грина.
3.2.9. Поверхностный интеграл 2 рода. Поток векторного поля через поверхность.
3.2.10. Физический смысл потока.
3.2.11. Свойства поверхностного интеграла 2 рода.

3.2.12. Вычисление поверхностного интеграла 2 рода.
3.2.13. Дивергенция векторного поля. Теорема Гаусса - Остроградского.
3.2.14. Физический смысл дивергенции.
3.2.15. Соленоидальное поле.
3.2.16. Циркуляция вектора по замкнутому контуру. Ротор. Теорема Стокса.
3.2.17. Ротор векторного поля. Физический смысл ротора. Безвихревое поле.
3.2.18. Потенциальное поле. Потенциал.
3.2.19. Лапласово поле.
3.2.20. Оператор Гамильтона.

1. Кратные интегралы

1.1. Области. Мера области. Диаметр области. Ранг дробления. Интеграл по области

Пусть задана некоторая конечная область Ω. Эта область может быть двумерной (множеством точек плоскости или поверхности) или трехмерной (множеством точек пространства).

Будем считать, что границей двумерной области Ω является гладкая или кусочно–гладкая кривая.

Определение 1

Кривая называется гладкой, если она в каждой точке имеет касательную, направление которой меняется непрерывно.

Определение 2

Кусочно-гладкой называется непрерывная кривая, которую можно разбить на конечное число гладких кривых.

Если Ω - трёхмерная область, то будем считать, что ее границей является гладкая или кусочно–гладкая поверхность.

Определение 3

Поверхность называется гладкой, если она в каждой точке имеет нормаль, направление которой меняется непрерывно.

Определение 4

Кусочно-гладкой называется непрерывная поверхность, которую можно разбить на конечное число гладких поверхностей.

Каждой области можно поставить в соответствие некоторое неотрицательное число, называемое ее **мерой.**

Мерой двумерной области является ее площадь, трехмерной – объем. Меру области Ω обычно обозначают $\text{м}(\text{Щ})$.

Мера области – аддитивная функция этой области. Это означает, что если область Ω разбить произвольным образом на n частей: $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$, то

$$\text{м}(\text{Щ}) = \text{м}(\text{Щ}_1) + \text{м}(\text{Щ}_2) + ... + \text{м}(\text{Щ}_n).$$

Определение 5

Диаметром области Щ называется максимальное расстояние между двумя точками этой области. Диаметр области Щ обозначается $d(\text{Щ})$ или просто d.

Определение 6

Если область Ω разбита произвольным образом на n частей $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ и $d_1, d_2, ..., d_n$ - диаметры этих областей, то число $\text{д} = \max\limits_i d_i$ называется рангом дробления области Ω.

Кратные интегралы – двойные и тройные, а также криволинейные и поверхностные, о которых речь пойдет в следующих разделах, являются частными случаями интеграла по мере области или просто интеграла по области.

Определение 7

Если в каждой точке $M \in \Omega$ задана функция $f(M)$, область Ω разбита произвольным образом на n частей $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$, внутри каждой частичной области Ω_i выбрана произвольно точка M_i, то интегралом от функции f по области Ω называется не зависящий от способа дробления Ω и от выбора точек M_i

предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\text{м}(\text{Щ}_i)$ при ранге дробления д, стремящемся к нулю. Для интеграла по области Ω используется обозначение:

$$\int\limits_{\text{Щ}} f(M)d\text{м} = \lim_{\substack{\text{д}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \text{м}(\text{Щ}_i).$$

1.2. Двойной интеграл

1.2.1. Определение, геометрический и механический смысл двойного интеграла. Теорема существования

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области *D.* Разобьем эту область произвольным образом на *n* частей $D_1, D_2, ..., D_n$ (рис. 1), которые будем называть ***элементарными областями*** и площади которых обозначим $\text{Д}S_1, \text{Д}S_2, ..., \text{Д}S_n$. В каждой области D_i выберем произвольно точку $P(\text{о}_i, \text{з}_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Для всех $i = 1, 2, ..., n$ вычислим $f(\text{о}_i, \text{з}_i)\cdot\text{Д}S_i$ и просуммируем эти выражения по i от 1 до n. В результате получили так называемую ***интегральную сумму***

$$\sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i)\cdot \text{Д}S_i .$$

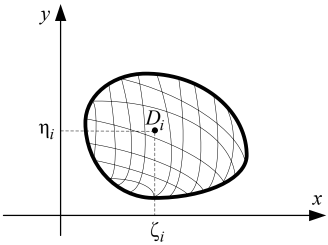

Рис. 1.

Если функция $f(x, y) \geq 0$ и имеет смысл плотности, распределенной в области *D,* то при достаточно малых элементарных областях $D_1, D_2, ..., D_n$ составленная интегральная сумма приближенно равна массе тонкой плоской пластины, занимающей область *D.*

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(о_i, з_i) \cdot ДS_i .$$

Очевидно, что точный результат мы получим, если будем бесконечно увеличивать число областей, на которые делится область *D.* Причем число элементарных областей $n \to \infty$ так, чтобы каждая область D_i стягивалась в точку.

Для этого введем ***ранг дробления*** $д = \max\limits_{i}(d_i)$, где d_i - диаметр области D_i.

Определение

Предел интегральной суммы $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ д \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(о_i, з_i) \cdot ДS_i$ при $n \to \infty$ и при $д \to 0$, если он существует, конечен, не зависит от способа дробления области *D* на части $D_1, D_2, ..., D_n$ и от выбора точек $P(о_i, з_i)$ в каждой области D_i, называется ***двойным интегралом*** по области *D* от функции $f(x, y)$ и обозначается $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dS$.

$$\iint\limits_{D} f(x, y) dS = \lim_{\substack{n \to \infty \\ д \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(о_i, з_i) \cdot ДS_i .$$

Функция $f(x, y)$ называется при этом ***интегрируемой*** на области D.

Теорема

Если функция $f(x, y)$ непрерывна или кусочно – непрерывна в ограниченной области *D,* то она в этой области интегрируема.

Доказательство этой теоремы ввиду его сложности выходит за пределы нашего курса.

Механический смысл двойного интеграла

Если $f(x, y) \geq 0$ и имеет смысл распределенной плотности в каждой точке области D, то

$$\iint_D f(x, y)\, dS = m,$$

где m - масса тонкой плоской пластины, занимающей в координатной плоскости xOy область D.

Геометрический смысл двойного интеграла

Если $f(x, y) = 1$, то масса тонкой пластины равна ее площади. Поэтому

$$\iint_D dS = S,$$

где S - площадь области D.

1.2.2. Свойства двойного интеграла

Из определения двойного интеграла можно сформулировать следующие его свойства.

1. Свойство линейности

Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в области D, то справедливо равенство

$$\iint_D \left(C_1 f_1(x, y) + C_2 f(x, y)\right) dS = C_1 \iint_D f_1(x, y) dS + $$
$$+ C_2 \iint_D f_2(x, y) dS.$$

Доказательство

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(C_1 f_1\left(\text{о}_i,\, \text{з}_i\right) + C_2 f_2\left(\text{о}_i,\, \text{з}_i\right)\right)\text{Д}S_i =$

$= C_1 \sum\limits_{i-1}^{n} f_1\left(\text{о}_i,\, \text{з}_i\right)\text{Д}S_i + C_2 \sum\limits_{i=1}^{n} f_2\left(\text{о}_i,\, \text{з}_i\right)\text{Д}S_i$, то, переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ и ранге дробления $\text{д} \to 0$, получим нужное соотношение.

2. Свойство аддитивности

Если область D разбивается кривой l на две непересекающиеся области $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ и если функция $f(x,\, y)$ интегрируема на каждой из этих областей, то справедливо равенство $\iint\limits_{D} f(x,\, y)\, dS = \iint\limits_{D^{(1)}} f(x,\, y)\, dS + \iint\limits_{D^{(2)}} f(x,\, y)\, dS$.

Доказательство

Это свойство следует из того, что двойной интеграл как предел интегральной суммы не зависит от способа дробления области *D* на части $D_1, D_2, ..., D_n$. Поэтому область *D* можно разбить линиями на части $D_1, D_2, ..., D_n$ так, чтобы одна из этих линий совпадала с кривой l, являющейся общей границей областей $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$.

3. Теорема сравнения

Если функции $f_1(x,\, y)$ и $f_2(x,\, y)$ - непрерывны в области D и если для всех точек $M(x,\, y) \in \mathrm{D}$ для этих функций выполнено неравенство $f_1(x,\, y) \le f_2(x,\, y)$, то аналогичное неравенство выполняется и для двойных интегралов от этих функций, то есть $\iint\limits_{D} f_1(x,\, y)\, dS \le \iint\limits_{D} f_2(x,\, y)\, dS$.

Доказательство

Из неравенства $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$ следует аналогичное неравенство для интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(\text{о}_i, \text{з}_i)\text{Д}S_i \le \sum_{i=1}^{n} f_2(\text{о}_i, \text{з}_i)\text{Д}S_i ,$$

из которого на основании предельного перехода в неравенстве следует:

$$\lim_{\substack{\text{n}\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_1(\text{о}_i, \text{з}_i)\text{Д}S_i \le \lim_{\substack{\text{n}\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_2(\text{о}_i, \text{з}_i)\text{Д}S_i .$$

Функции интегрируемы на области D, так как они на этой области непрерывны. Следовательно, оба предела существуют и конечны. Тогда по определению двойного интеграла справедливо неравенство

$$\iint_D f_1(x, y)dS \le \iint_D f_2(x, y)dS .$$

Следствие

Если непрерывная функция $f(x, y) \ge 0$ во всех точках $M(x, y) \in \text{D}$, то $\iint_D f(x, y)dS \ge 0$.

4. Теорема об оценке двойного интеграла

Если m - наименьшее значение функции $f(x, y)$, интегрируемой в области D, а M - ее наибольшее значение в этой области, то есть для всех точек $(x, y) \in D$ выполняется неравенство $m \le f(x, y) \le M$, то

$$m\text{S} \le \iint_D f(x, y)\,dS \le M\,S \text{, где } S \text{ - площадь области } D .$$

Доказательство

Проинтегрируем неравенство $\mathrm{m} \le f(x, y) \le M$ по области D: $\iint\limits_D m\,\mathrm{dS} \le \iint\limits_D f(x, y)dS \le \iint\limits_D M\,dS$ и учтем, что $\iint\limits_D m\,dS = m\iint\limits_D dS = m\,S$, а $\iint\limits_D M\,dS = M\iint\limits_D dS = M\,S$. Тогда

$$m\mathrm{S} \le \iint\limits_D f(x, y)\,dS \le M\,S .$$

5. Теорема о среднем

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то в этой области существует такая точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, для которой выполняется равенство

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = f(x_0, y_0)\cdot S ,$$

где S - площадь области D.

Доказательство

Непрерывная в ограниченной замкнутой области функция принимает в ней наибольшее и наименьшее значения, то есть для всех точек $(x, y) \in D$ выполняется неравенство $m \le f(x, y) \le M$, где m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$,

По теореме об оценке двойного интеграла справедливо неравенство $m\mathrm{S} \le \iint\limits_D f(x, y)\,dS \le M\,S$, в котором через S обозначена площадь области D.

Разделив все части неравенства на величину площади S, получим

$$m \le \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x, y)\,dS \le M .$$

Из последнего неравенства следует, что $\frac{1}{S}\iint\limits_D f(x, y)\,dS = f\left(x_0, y_0\right)$ - одно из значений непрерывной функции $f\left(x, y\right)$, для которой все точки промежутка $\left[m, M\right]$ являются ее значениями. Умножив обе части последнего равенства на S, получим необходимое равенство $\iint\limits_D f(x, y)\,dS = f\left(x_0, y_0\right)\cdot S$.

Значение функции $f\left(x_0, y_0\right)$ называется ***средним значением.***

1.2.3. Двойной интеграл в декартовых координатах

Предположим, что область D, на которой определен двойной интеграл $\iint\limits_D f\left(x, y\right) dS$, задана неравенствами

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ g_1\left(x\right) \le y \le g_2\left(x\right) \end{cases}.$$

Разобьем эту область на части $D_1, D_2, ..., D_n$ прямыми, параллельными координатным осям. Будем считать, что каждая из этих прямых пересекает область D не более чем в двух точках (рис. 2). В противном случае область следует разбить на несколько областей.

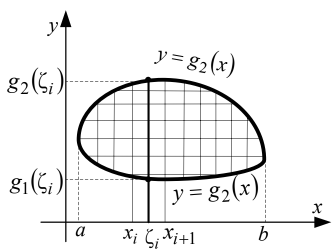

Рис. 2.

При таком способе дробления площадь каждой частичной области D_i равна $\text{Д}S_i = \text{Д}x_i \cdot \text{Д}y_i$, где $\text{Д}x_i = x_{i+1} - x_i$,

$\text{Д}y_i = y_{i+1} - y_i$. Двойной интеграл как предел интегральной суммы можно записать в виде:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i) \cdot \text{Д}x_i\, \text{Д}y_i\, ,$$

где ранг дробления $\text{д} = \max\limits_i \{\text{Д}x_i, \text{Д}y_i\}$.

Зафиксируем значение $x = \text{ж}_i$ и запишем интегральную сумму в виде:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \text{Д}x_i \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i)\text{Д}y_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \text{Д}x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \text{Д}x_i \left(\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \text{Д}y_i}} \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i)\text{Д}y_i \right) =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \text{Д}x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \text{Д}x_i \int\limits_{g_1(\text{ж}_i)}^{g_2(\text{ж}_i)} f(\text{о}_i, y)dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \text{Д}x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \text{Ц}(\text{ж}_i)\text{Д}x_i =$$

$$= \int\limits_a^b \text{Ц}(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy\, .$$

Аналогично можно показать, что если область D, на которой определен двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dS$, задана неравенствами

$$\begin{cases} a \le y \le b \\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \end{cases},$$

то двойной интеграл по этой области можно представить в виде

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \int\limits_a^b dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx\,.$$

1.2.4. Повторный интеграл и его вычисление

Интегралы вида $\int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ и $\int\limits_a^b dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$ называются ***повторными.*** В первом интеграле переменная x является переменной внешнего интегрирования, а переменная y - переменной внутреннего интегрирования. Во втором интеграле внешнее интегрирование ведется по переменной y, а внутреннее по переменной x.

Вычислять повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ следует, начиная с частного интегрирования по y внутреннего интеграла $\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$. После подстановки пределов интеграции получится функция переменной x. Ее нужно проинтегрировать по переменной x в пределах от a до b.

Задача 1

Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} \left(xy^2 + 1\right) dy$.

Решение

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} \left(xy^2 + 1\right) dy = \int\limits_0^1 dx \left(x \cdot \frac{y^3}{3} + y \right)\Bigg|_{x^2}^{x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x\frac{x^3}{3} + x - \frac{x^7}{3} - x^2 \right) dx = \left(\frac{1}{3}\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\frac{x^8}{8} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{2}-\frac{1}{24}-\frac{1}{3}=\frac{23}{120}.$$

Задача 2

Вычислить $\iint\limits_D xydxdy$, если область ограничена линиями $y=x^2$ и $x=y^2$.

Решение

Область D можно задать неравенствами (рис. 3):

$$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2\le y\le \sqrt{x} \end{cases}.$$

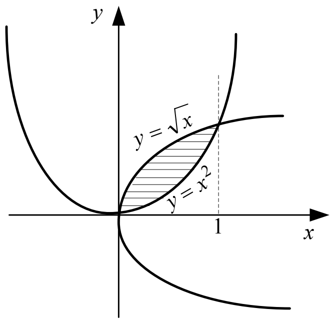

Рис. 3.

Тогда

$$\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy=\int\limits_0^1 xdx\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x-x^4\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^2-x^5\right)dx=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}.$$

Задача 3

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2 y + 2xy^2\right) dS$, если область интегрирования ограничена кривыми: $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Решение

В этой задаче удобнее свести двойной интеграл к повторному интегралу, в котором переменной внешнего интегрирования будет y . Область D можно задать неравенствами (рис.4):

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 2 - y \end{cases}.$$

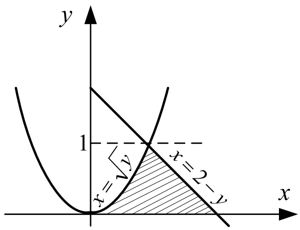

Рис. 4.

Тогда двойной интеграл можно записать в виде повторного интеграла.

$$\iint\limits_D \left(x^2 y + 2xy^2\right) dS = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} \left(x^2 y + 2xy^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \left(\frac{x^3}{3} y + y^2 x^2 \right) \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \left(\frac{(2-y)^3}{3} y + y^2 (2-y)^2 - \frac{1}{3} y^2 \sqrt{y} - y^3 \right) =$$

$$=\int_0^1 dy\left(\frac{8}{3}y-4y^2+2y^3-\frac{y^4}{3}+4y^2-4y^3+y^4-\frac{1}{3}y^{2,5}-y^3\right)=$$

$$=\int_0^1 dy\left(\frac{8}{3}y+\frac{2}{3}y^4-3y^3-\frac{1}{3}y^{2,5}\right)=$$

$$=\left(\frac{4y^2}{3}+\frac{2}{15}y^5-\frac{3}{4}y^4-\frac{2}{21}y^{3,5}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{15}-\frac{3}{4}-\frac{2}{21}=\frac{560+56-315-40}{420}=\frac{87}{140}\,.$$

Задача 4

Поменять порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{-2} dy \int_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-2}^{2} dy \int_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx$$

Решение

Прежде чем расставлять пределы интеграции в другом порядке, выясним, по какой области ведется интегрирование в каждом интеграле.

Учитывая пределы интеграции, можно выписать следующие неравенства для областей D_1 и D_2:

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}\le y\le -2 \\ -\sqrt{8-y^2}\le x\le \sqrt{8-y^2} \end{cases} \quad (D_1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} -2\le y\le 2 \\ y\le x\le \sqrt{8-y^2} \end{cases} \quad (D_2).$$

Следовательно, область D_1 ограничена кривыми:

$$\begin{cases} y=-2\sqrt{2},\ y=-2 \\ x=\pm\sqrt{8-y^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x^2+y^2=8 \end{cases},$$

а область D_2 ограничена кривыми:

$$\begin{cases} y=-2,\ y=2 \\ x=y \\ x=\sqrt{8-y^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=y \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \quad \text{(рис.5. а).}$$

Если поменять порядок интегрирования, то область придется разбить на две области прямой $x=2$ (рис. 5. б). Тогда области интегрирования D_1 и D_2 можно задать неравенствами:

$$\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ -\sqrt{8-y^2}\le y\le x \end{cases} \ (D_1) \ \text{и} \ \begin{cases} 2\le x\le 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{8-x^2}\le y\le \sqrt{8-x^2} \end{cases} \ (D_2).$$

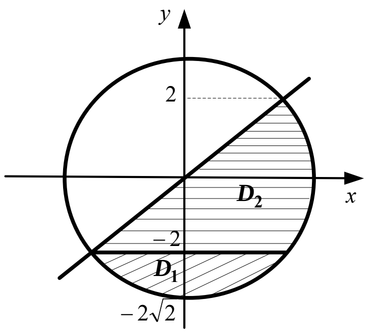

Рис. 5. а

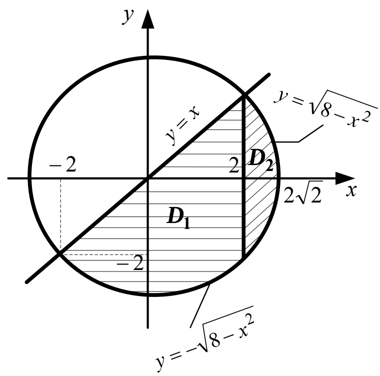

Рис. 5. б

Из последних неравенств можно определить новые пределы интеграции:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{x} f(x,y)dy + \int_{2}^{2\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy\ .$$

1.2.5. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ взаимно однозначно отображают область D (рис. 7) в декартовых координатах x, y на область D' (рис. 6) в криволинейных координатах u, v.

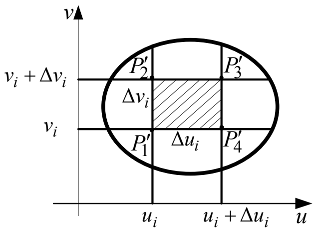

Рис. 6.

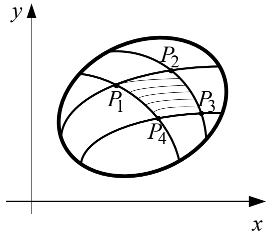

Рис. 7.

В плоскости Ouv рассмотрим прямоугольную площадку, площадь которой $ДS_i' = Дu_i \cdot Дv_i$ (рис. 6). Ей соответствует криволинейный четырёхугольник $P_1P_2P_3P_4$ (рис. 7) в плоскости Oxy. Если $Дu_i$ и $Дv_i$ достаточно малы, то криволинейный четырёхугольник $P_1P_2P_3P_4$ можно считать параллелограммом. Его площадь $ДS_i$ можно вычислить как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{P_1P_4}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$. Для этого найдем координаты вершин P_1, P_2, P_4.

Координаты точки $P_1(x_1, y_1)$: $\begin{cases} x_1 = x(u_i, v_i) \\ y_1 = y(u_i, v_i) \end{cases}$.

Координаты точки $P_2(x_2, y_2)$ определяются из системы:

$$\begin{cases} x_2 = x(u_i; v_i + Дv_i) \approx x(u_i, v_i) + \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_i)Дv_i \\ y_2 = y(u_i; v_i + Дv_i) \approx y(u_i, v_i) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_i)Дv_i \end{cases},$$

в которой отброшены бесконечно малые более высокого порядка, чем $Дv_i$.

Координаты точки $P_4(x_4, y_4)$ определяются из системы

$$\begin{cases} x_4 = x(u_i + \text{Д}u_i; v_i) \approx x(u_i, v_i) + \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_i)\text{Д}u_i \\ y_4 = y(u_i + \text{Д}u_i; v_i) \approx y(u_i, v_i) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_i)\text{Д}u_i \end{cases},$$

в которой отброшены бесконечно малые более высокого порядка, чем $\text{Д}u_i$.

Площадь параллелограмма $P_1P_2P_3P_4$ определяется по формуле:

$$\text{Д}S_i = \left\| \begin{vmatrix} x_4 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_4 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_i)\text{Д}u_i & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_i)\text{Д}v_i \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_i)\text{Д}u_i & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_i)\text{Д}v_i \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_i) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_i) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_i) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_i) \end{vmatrix}}_{I} \right| \cdot \underbrace{\text{Д}u_i\ \text{Д}v_i}_{\text{Д}S_i'}.$$

Определитель $I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ - называется ***якобианом*** перехода от координат x, y к координатам u, v. Через якобиан связаны площади элементарной области в координатах x, y и координатах u, v.

$$\text{Д}S_i = |\, I(u_i, v_i)|\text{Д}S_i'.$$

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ - непрерывную в области D. Тогда каждому значению функции $z = f(x, y)$ в области D соответствует то же самое значение функции $z = F(u, v)$ в области D', где $F(u,v) = f(x(u,v); y(u,v)) = f(x,y)$.

Интегральная сумма для функции $z = f(x,y)$ в области D будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\text{Д}S_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\text{Д}S_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\left|I(u_i, v_i)\right|\text{Д}S'_i .$$

Переходя в этой интегральной сумме к пределу при $n \to \infty$ и при ранге дробления $\text{д} \to 0$, получим формулу преобразования координат в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(u,v)\left|I(u,v)\right| dudv .$$

1.3.7. Двойной интеграл в полярных координатах

Переход от декартовых координат к полярным является частным случаем замены переменной в двойном интеграле.

Декартовы координаты выражаются через полярные координаты по формулам: $\begin{cases} x = \text{с} \cdot \cos \text{ц} \\ y = \text{с} \cdot \sin \text{ц} \end{cases}$.

Якобиан преобразования имеет в данном случае вид:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \text{с}} & \dfrac{\partial x}{\partial \text{ц}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \text{с}} & \dfrac{\partial y}{\partial \text{ц}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \text{ц} & -\text{с} \sin \text{ц} \\ \sin \text{ц} & \text{с} \cos \text{ц} \end{vmatrix} = \text{с} \cos^2 \text{ц} + \text{с} \sin^2 \text{ц} = \text{с} .$$

Следовательно, при переходе к полярным координатам двойной интеграл преобразуется по следующему правилу:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(\text{с}, \text{ц})\,\text{с}\, d\text{с}\, d\text{ц} .$$

Задача

Вычислить массу тонкой пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 4y = 0$ и $y = x$ при $y \le x$, если плотность в каждой ее точке равна $\text{д}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение

Масса тонкой плоской пластины с плотностью $д(x, y)$ определяется по формуле

$$m = \iint\limits_D д(x, y)dS = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dS .$$

Чтобы построить область D, приведем уравнение кривой $x^2 + y^2 - 4y = 0$ к каноническому виду.

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y^2 - 4y + 4\right) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 2^2 .$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(0, 2)$ и радиусом 2. Область D показана на рисунке 8.

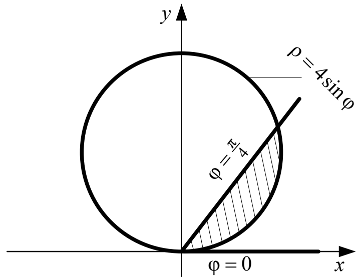

Рис. 8.

Перейдем к полярной системе координат. Поскольку $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{с^2 \cos^2 ц + с^2 \sin^2 ц} = \sqrt{с^2\left(\cos^2 ц + \sin^2 ц\right)} =$

$= \sqrt{с^2} = с$, то масса пластины определяется следующим интегралом:

$$m = \iint\limits_D с \cdot с \; dс \; dц .$$

Чтобы свести двойной интеграл к повторному, запишем уравнения всех границ области интегрирования в полярных координатах.

1). Уравнение окружности в полярных координатах:

$$с^2\cos^2 ц + с^2\sin^2 ц = 4с\sin ц \text{ или}$$

$$с^2\underbrace{\left(\cos^2 ц + \sin^2 ц\right)}_{1} = 4с\sin ц .$$

Разделив последнее равенство на $с \neq 0$, получим полярное уравнение окружности $с = 4\sin ц$.

2). Поскольку область интегрирования в правой полуплоскости (рис. 8), то прямая $y = x$ является частью границы области только при $x \geq 0$. Тогда ее полярное уравнение имеет вид $ц = \dfrac{р}{4}$.

Следовательно, для области интегрирования справедливо

$$\begin{cases} 0 \leq ц \leq \dfrac{р}{4} \\ 0 \leq с \leq 4\sin ц \end{cases}.$$

Тогда

$$m = \iint\limits_D с^2\, dс\, dц = \int\limits_0^{р/4} dц \int\limits_0^{4\sin ц} с^2\, dс =$$

$$= \int\limits_0^{р/4} dц \left.\frac{с^3}{3}\right|_0^{4\sin ц} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{р/4} 64\sin^3 ц\, dц = \frac{64}{3}\int\limits_0^{р/4} \sin^2 ц \sin ц\, dц =$$

$$= -\frac{64}{3}\int\limits_0^{р/4}\left(1 - \cos^2 ц\right) d\left(\cos ц\right) = -\frac{64}{3}\left.\left(\cos ц - \frac{\cos^3 ц}{3}\right)\right|_0^{р/4} =$$

$$= -\frac{64}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{64}{3}\cdot\frac{6\sqrt{2} - 12 - \sqrt{2} + 4}{12} =$$

$$= \frac{16\left(8 - 5\sqrt{2}\right)}{9}.$$

1.2.6 Эллиптические координаты

Числа $с \ge 0$ и $ц$, для которых $\begin{cases} x = aс\cos ц \\ y = bс\sin ц \end{cases}$, где $a > 0$, $b > 0$ - постоянные числа, называются ***эллиптическими координатами.***

Якобиан при переходе к эллиптическим координатам определяется из следующего определителя:

$$I = \begin{vmatrix} a\cos ц & b\sin ц \\ -aс\sin ц & bс\cos ц \end{vmatrix} = abс\left(\cos^2 ц + \sin^2 ц\right) = abс .$$

Эллиптические координаты удобно использовать, если среди границ области интегрирования в двойном интеграле есть эллипсы.

Если в уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ сделать замену переменных, используя при этом эллиптические координаты

$$\begin{cases} x = aс\cos ц \\ y = bс\sin ц \end{cases},$$

то получится уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2с^2\cos^2 ц}{a^2} + \frac{b^2с^2\sin^2 ц}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$с^2\left(\cos^2 ц + \sin^2 ц\right) = 1 \Leftrightarrow с = 1 .$$

Следовательно, в эллиптических координатах эллипс преобразуется в окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

1.2.7. Механические приложения двойных интегралов

Пусть масса распределена по плоской области D с плотностью $д(x, y)$. Статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции тонкой пластины, занимающей область D, вычисляются по следующим формулам.

Статические моменты

Относительно координатных осей:

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot \text{д}(x, y) dS; \qquad S_y = \iint\limits_D x \cdot \text{д}(x, y) dS.$$

Относительно начала координат:

$$S_o = \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \text{д}(x, y) dS.$$

Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c)$

$$x_c = \frac{S_y}{m}; \qquad y_c = \frac{S_x}{m}$$

или $x_c = \dfrac{1}{m} \iint\limits_D \text{д}(x, y)\, x\, dS$, $\quad y_c = \dfrac{1}{m} \iint\limits_D \text{д}(x, y)\, y\, dS$,

где $m = \iint\limits_D \text{д}(x, y) dS$ - масса тела.

Моменты инерции

Относительно координатных осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \text{д}(x, y) dS; \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \text{д}(x, y) dS.$$

Относительно начала координат:

$$I_o = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \text{д}(x, y) dS.$$

Задача

Найти координаты центра тяжести однородной плоской тонкой пластины, ограниченной четвертью эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в первом квадранте и координатными осями (рис. 9).

Решение

Поскольку пластина однородная, то плотность $\text{д}(x, y) = \text{const}$. Можно считать, что плотность $\text{д}(x, y) = 1$.

Масса однородной тонкой пластины в данном случае будет равна площади, которую она занимает. Площадь области, границей которой является эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ равна $S=\mathrm{p}ab$. Следовательно, масса пластины, равная площади области, ограниченной четвертью эллипса, будет равна

$$m=\frac{1}{4}\mathrm{p}ab.$$

Если точка $C(x_c, y_c)$ - центр тяжести, то для ее координат справедливо:

$$x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\,dS; \qquad y_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\,dS.$$

Так как область, которую занимает пластина, ограничена эллипсом (рис. 9. а), то перейдем к эллиптическим координатам. В эллиптических координатах с и ц область D преобразуется в прямоугольник $\begin{cases}0\le \text{ц}\le \frac{\mathrm{p}}{2}\\ 0\le \text{с}\le 1\end{cases}$ (рис. 9. b).

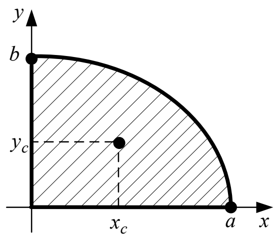

Рис. 9. а

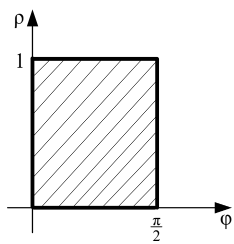

Рис. 9. b

Тогда, учитывая якобиан преобразования при переходе к эллиптическим координатам, получим:

$$x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D a\text{с}\cos\text{ц}\,ab\text{с}\,d\text{с}d\text{ц}=\frac{4a^2b}{\mathrm{p}ab}\int\limits_0^{\frac{\mathrm{p}}{2}}d\text{ц}\int\limits_0^1\text{с}^2\cos\text{ц}d\text{с}=$$

$$= \frac{4a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^1 \rho^2 d\rho .$$

В последнем интеграле переменные разделены, то есть внутренний интеграл не зависит от переменной внешнего интегрирования. Это означает, что повторный интеграл равен произведению интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi$ и $\int_0^1 \rho^2 d\rho$.

Учитывая это, вычислим x_c.

$$x_c = \frac{4a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{4a}{\pi}\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4a}{3\pi}.$$

Аналогично определяется ордината центра тяжести.

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_D b\rho\sin\varphi\, ab\rho\, d\rho d\varphi = \frac{4ab^2}{\pi ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 \rho^2\sin\varphi d\rho =$$

$$= \frac{4b}{\pi}ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{4b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= -\frac{4b}{\pi}\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4b}{3\pi}.$$

Значит, центр тяжести однородной тонкой пластины имеет координаты $C\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

1.3. Тройной интеграл

1.3.1. Определение тройного интеграла. Теорема существования

Пусть Ω - трёхмерная область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью и в каждой точке $M(x, y, z) \in \Omega$ определена функция $f(x, y, z)$. Разобьём область Ω произвольным образом на n частей: $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$. Области $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ будем называть элементарными областями или элементарными телами, а через $\text{Д}V_1, \text{Д}V_2, ..., \text{Д}V_n$ будем обозначать объемы элементарных областей $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$.

Внутри каждой элементарной области Ω_i возьмём точку $M_i(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i) \in \text{Щ}_i$, вычислим $f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i)\text{Д}V_i$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i) \cdot \text{Д}V_i$. Введем ранг дробления $\text{д} = \max_i d_i$, где d_i - диаметр элементарной области Щ_i.

Определение

Если при $n \to \infty$ и при $\text{д} \to 0$ существует конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i) \cdot \text{Д}V_i$, не зависящий от способа разбиения области и выбора точек M_i, то он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области Ω. При этом функция $f(x, y, z)$ называется интегрируемой на области Ω.

Для тройного интеграла используется обозначение:

$$\iiint\limits_{\text{Щ}} f(x, y, z)dV = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{д} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i) \cdot \text{Д}V_i .$$

Теорема существования

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна или кусочно – непрерывна на области Ω, то она на этой области интегрируема.

1.3.2. Механический и геометрический смысл тройного интеграла

Пусть непрерывная функция $f(x, y, z) \geq 0$ на области Ω и представляет собой распределенную по пространственной области Ω плотность,

Если область Ω разбита произвольным образом на n элементарных областей $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ и если $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$ - объемы тел, занимающих эти области, то при достаточно малых $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ элементарные тела можно считать однородными с плотностью $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, равной плотности в произвольно выбранной точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$. Тогда произведение $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$ приближенно равно массе элементарного тела Ω_i, а интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i$ приближенно равна массе тела с переменной плотностью $f(x, y, z)$, занимающего область Ω.

Этот результат тем точнее, чем больше n - число областей, на которые разбита область Ω, и чем меньше диаметры d_i областей $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$. Очевидно, что предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и при $\delta = \max\limits_{i} d_i \to 0$ равен массе пространственного тела, занимающего область Ω.

$$m = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i ,$$

m - ***масса тела*** Ω, или

$$m = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dV .$$

Поскольку $f(x, y, z) \equiv 1$, масса тела Ω равна его объему, то тройной интеграл по области Ω с подынтегральной функцией, равной 1, представляет собой объем V тела, занимающего эту область, то есть

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dV .$$

1.3.3. Свойства тройного интеграла

Из определения тройного интеграла следуют его основные свойства.

1. Свойство линейности

Если функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы в области D, то

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f(x, y, z)\right) dV =$$

$$C_1 \iiint\limits_{\Omega} f_1(x, y, z) dV + C_2 \iiint\limits_{\Omega} f_2(x, y, z) dV .$$

2. Свойство аддитивности

Если область Ω разбивается на две непересекающиеся области Ω_1 и Ω_2, и если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на каждой из этих областей, то справедливо равенство

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x, y, z) dV + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x, y, z) dV .$$

3. Теорема сравнения

Если функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ - непрерывны в области Ω и если для всех точек $(x, y, z) \in \Omega$ выполнено неравенство $f_1(x, y, z) \le f_2(x, y, z)$, то аналогичное неравенство выполняется и для тройных интегралов от этих функций по области Ω, то есть

$$\iiint\limits_{\Omega} f_1(x, y, z) dV \le \iiint\limits_{\Omega} f_2(x, y, z) dV$$

Следствие

Если непрерывная в области Щ функция $f(x, y, z) \ge 0$ для всех точек $M(x, y, z) \in$ Щ, то $\iiint\limits_{Щ} f(x, y, z)dV \ge 0$.

4. Теорема об оценке тройного интеграла

Если m - наименьшее значение функции $f(x, y, z)$, интегрируемой в области Щ, а M - ее наибольшее значение в этой области, то есть для всех точек $(x, y, z) \in$ Щ выполняется неравенство $m \le f(x, y, z) \le M$, то

$m\mathrm{V} \le \iiint\limits_{Щ} f(x, y, z)dV \le M\,V$, где V - объем области Щ.

5. Теорема о среднем

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области Щ трехмерного пространства, то в этой области существует такая точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in$ Щ, для которой справедливо: $\iiint\limits_{Щ} f(x, y, z)dV = f(x_0, y_0, z_0)\cdot V$, где V - объем области Щ.

1.3.4. Тройной интеграл в декартовых координатах

Предположим, что область интегрирования Щ в тройном интеграле $\iiint\limits_{Щ} f(x, y, z)dV$ ограничена гладкими поверхностями, заданными в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Разобьем область интегрирования на элементарные области $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям, $x = const$, $y = const$, $z = const$. Тогда элементарный объем каждой области $Щ_i$ будет равен $ДV_i = Дx_i Дy_i Дz_i$.

По определению:

$$\iiint\limits_{Щ} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ д\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(о_i, з_i, ж_i) Д V_i \,.$$

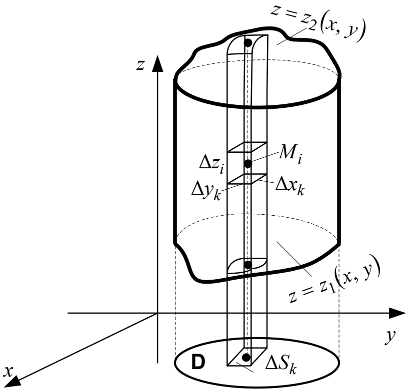

Рис. 10.

Пусть область Щ однозначно проектируется в область D на плоскости xOy. При этом поверхность, которая ограничивает область Щ, можно разбить на две поверхности: поверхность $z = z_1(x, y)$, ограничивающая Щ снизу, и поверхность $z = z_2(x, y)$, ограничивающая Щ сверху (рис. 10).

Разобьём область D на плоскости xOy на m элементарных областей $D_1, D_2, ...D_m$. Обозначим через $Д\, s_k$ площадь элементарной области D_k, $k = 1, 2, ..., m$.

На каждой элементарной области построим цилиндр с образующей, параллельной оси Oz. Такой цилиндр вырежет на граничных поверхностях $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ некоторые элементарные области, которые будем считать плоскими и параллельными координатной плоскости xOy. Каждый цилиндр разобьем на n частей плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy, и расстояния между плоскостями обозначим через $Дz_i$, $i = 1, 2,..., n$.

В результате область Щ разобьётся на элементарные цилиндры Щ_{ki} с площадью основания $\text{Д}S_k$ и высотой $\text{Д}z_i$. Объём элементарного цилиндра равен: $\text{Д}V_{ki} = \text{Д}S_k \cdot \text{Д}z_i$.

В каждом элементарном цилиндре Щ_{ki} выберем точку $M_{ki}(\text{о}_k, \text{з}_k, \text{ж}_i) \in \text{Щ}_{ki}$. Тогда интегральная сумма примет вид:

$$\iiint\limits_{\text{Щ}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{k=1}^{m} \text{Д}S_k \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_k, \text{з}_k, \text{ж}_i)\text{Д}z_i =$$

$$= \lim_{\substack{m\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{k=1}^{m} \text{Д}S_k \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\max \text{Д}z_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\text{ж}_k, \text{з}_k, \text{ж}_i)\text{Д}z_i =$$

$$= \lim_{\substack{m\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{k=1}^{m} \text{Д}S_k \int\limits_{z_1(\text{о}_k, \text{з}_k)}^{z_2(\text{о}_k, \text{з}_k)} f(\text{о}_k, \text{з}_k, z)dz =$$

$$= \lim_{\substack{m\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{k=1}^{m} \text{Ц}(\text{о}_k, \text{з}_k)\text{Д}S_k = \iint\limits_{D} \text{Ц}(x, y)dS,$$

где функция $\text{Ц}(x, y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ является интегралом с переменным верхним и нижним пределом.

Следовательно, тройной интеграл равен двойному интегралу по проекции на плоскость xOy области Щ. Подынтегральной функцией этого двойного интеграла является интеграл по переменной z от функции $f(x, y, z)$ в пределах: от значения z на поверхности, являющейся нижней границей области Щ, до значения z на поверхности, являющейся верхней границей Щ.

$$\iiint\limits_{\text{Щ}} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D} ds \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Задача 1

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2$, $x + y = 1$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

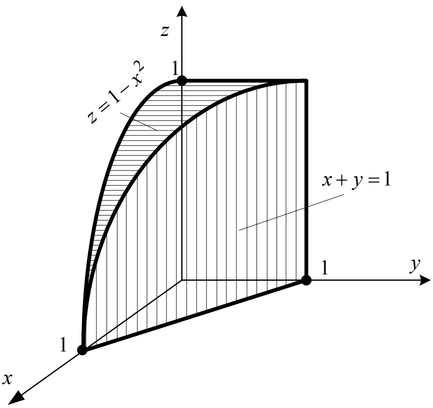

Рис. 11.

Решение

Из геометрического смыла тройного интеграла следует, что

$$V = \iiint\limits_{Щ} 1\, dV .$$

Пространственная область, ограниченная заданными поверхностями изображена на рисунке 11. Из этого рисунка ясно, что область Щ проектируется на плоскость xOy в треугольник, ограниченный координатными осями и прямой $x + y = 1$ (рис. 12).

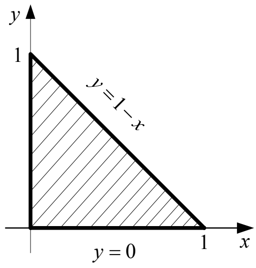

Рис. 12.

Область Щ ограничена снизу координатной плоскостью $z = 0$, а сверху – поверхностью $z = 1 - x^2$. Поэтому тройной интеграл можно свести к следующему двойному интегралу:

$$V = \iiint\limits_{\text{Щ}} 1\,dV = \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{0}^{1-x^2} dz = \iint\limits_{D} dx\,dy\, z \Big|_{0}^{1-x^2} =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(1 - x^2\right) dx\,dy = \int\limits_{0}^{1} \left(1 - x^2\right) dx \int\limits_{0}^{1-x} dy = \int\limits_{0}^{1} \left(1 - x^2\right)(1 - x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(1 - x^2 - x + x^3\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Иногда удобнее проектировать область интегрирования в координатную плоскость xOz или yOz.

Задача 2

Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x = y^2 + z^2$ и $x = 1$, если плотность в каждой точке (x, y, z) равна $\text{д}(x, y, z) = y^2 + z^2$.

Решение

Масса тела вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_{\text{Щ}} \text{д}(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_{\text{Щ}} \left(y^2 + z^2\right) dV.$$

Область интегрирования Щ показана на рисунке 13. Ее удобно проектировать в плоскость yOz. Чтобы найти проекцию области Щ, определим линию пересечения заданных поверхностей: $\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 1 \end{cases}$.

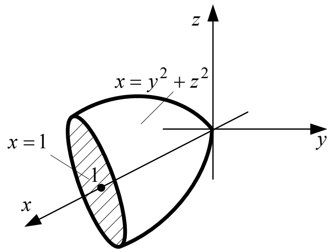

Рис. 13.

Преобразуем систему к виду $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$, из которого ясно, что линией пересечения является окружность с радиусом 1, лежащая в плоскости $x = 1$.

Следовательно, область интегрирования проектируется в координатную плоскость yOz в круг с радиусом, равным 1 (рис.14).

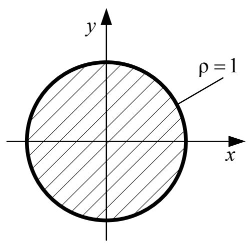

Рис. 14.

Тройной интеграл по области Щ сведется к двойному интегралу по области D (рис. 14). Пределы интеграции для переменной x определяются из неравенства: $y^2 + z^2 \le x \le 1$.

$$m = \iiint\limits_{Щ} \left(y^2 + z^2\right) dV = \iint\limits_{D} \left(y^2 + z^2\right) dydz \int\limits_{y^2+z^2}^{1} dx =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(y^2 + z^2\right) dydz \cdot x \Bigg|_{y^2+z^2}^{1} = \iint\limits_{D} \left(y^2 + z^2\right) \cdot \left(1 - y^2 - z^2\right) dydz \ .$$

Область интегрирования D - круг. Поэтому перейдем к полярным координатам.

$$\begin{cases} y = \text{с}\cos\text{ц} \\ z = \text{с}\sin\text{ц} \end{cases}, \quad y^2 + z^2 = \text{с}^2, \quad \begin{cases} 0 \le \text{ц} \le 2\text{р} \\ 0 \le \text{с} \le 1 \end{cases}.$$

$$m = \iint\limits_D \text{с}^2 \cdot \left(1 - \text{с}^2\right)\text{с}\,d\text{с}\,d\text{ц} = \int\limits_0^{2\text{р}} d\text{ц} \int\limits_0^1 \left(\text{с}^3 - \text{с}^5\right) d\text{с} =$$

$$= 2\text{р} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\text{с}^4 - \tfrac{1}{6}\text{с}^6\right)\Bigg|_0^1 = 2\text{р} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\text{р}}{6}.$$

1.3.5. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функции $\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$ взаимно однозначно отображают область Щ в декартовых координатах x, y, z на область Щ_1 в криволинейных координатах u, v, w.

Тройной интеграл по области Щ при переходе к координатам u, v, w преобразуется в тройной интеграл по области Щ_1 через якобиан преобразования I, то есть:

$$\iiint\limits_{\text{Щ}} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\text{Щ}_1} f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right] |I|\, dudvdw.$$

Якобиан преобразования вычисляется по формуле

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

которая доказывается так же, как аналогичная формула для двойного интеграла.

1.3.6. Тройной интеграл в сферических координатах

В сферических координатах положение точки M в пространстве определяется числами $r, ц, и$, где

r - сферический радиус, расстояние от начала координат до точки M;

ц - полярный угол, угол поворота оси Ox до вектора $\overline{OM_1}$, а точка M_1 - проекция точки M в плоскость xOy;

и - азимутальный угол, угол поворота оси Oz до вектора $\overline{OM}$ (рис. 15).

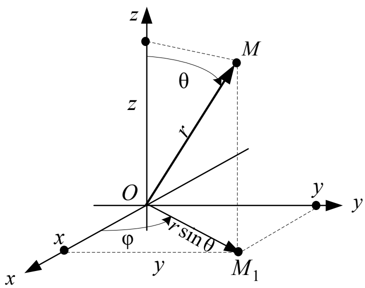

Рис. 15.

Координатными поверхностями в сферической системе координат являются:

$r = c$ - сферы радиуса c с центром в начале координат;

$ц = c$ - полуплоскости, проходящие через ось Oz и составляющие с осью Ox угол ц;

$и = c$ - верхние или нижние полости конических поверхностей, образующие которых составляют с осью Oz угол и.

Из рисунка 15 ясно, что декартовы координаты выражаются через сферические координаты по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos \text{ц} \sin \text{и} \\ y = r\sin \text{ц} \sin \text{и} \,. \\ z = r\cos \text{и} \end{cases}$$

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферических координатах имеет вид: $r = R$.

Элемент объема в сферических координатах равен $dV = \left| I \right| dr\, d\text{ц}\, d\text{и}$, а для якобиана преобразования I справедливо:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \text{ц}} & \dfrac{\partial x}{\partial \text{и}} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \text{ц}} & \dfrac{\partial y}{\partial \text{и}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \text{ц}} & \dfrac{\partial z}{\partial \text{и}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \text{ц} \sin \text{и} & -r\sin \text{ц} \sin \text{и} & r\cos \text{ц} \cos \text{и} \\ \sin \text{ц} \sin \text{и} & r\cos \text{ц} \sin \text{и} & r\sin \text{ц} \cos \text{и} \\ \cos \text{и} & 0 & -r\sin \text{и} \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \cos^2 \text{и} \sin \text{и} \begin{vmatrix} -\sin \text{ц} & \cos \text{ц} \\ \cos \text{ц} & \sin \text{ц} \end{vmatrix} - r^2 \sin^3 \text{и} \begin{vmatrix} \cos \text{ц} & -\sin \text{ц} \\ \sin \text{ц} & \cos \text{ц} \end{vmatrix} =$$

$$= -r^2 \cos^2 \text{и} \sin \text{и} - r^2 \sin^3 \text{и} = -r^2 \sin \text{и} \left(\cos^2 \text{и} + \sin^2 \text{и} \right) =$$

$$= -r^2 \sin \text{и}$$

Тройной интеграл при переходе от декартовых координат к сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_{\text{Щ}} f\left(x, y, z\right) dx dy dz =$$

$$= \iiint\limits_{\text{Щ}} f\left(r\cos \text{ц} \sin \text{и}; r\sin \text{ц} \sin \text{и}; r\cos \text{и}\right) r^2 \sin \text{и} d\text{с}\, d\text{ц}\, d\text{и} \,.$$

Задача

Вычислить $\iiint\limits_{\text{Щ}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV$, где область Щ ограничена поверхностями: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ y = 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \end{cases}$.

Решение

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ в сферических координатах имеет вид:

$$r = a.$$

Уравнение конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ в сферических координатах имеет вид:

$$r^2 \sin^2 \text{и} \left(\cos^2 \text{ц} + \sin^2 \text{ц}\right) = r^2 \cos^2 \text{и},$$

или $\sin^2 \text{и} = \cos^2 \text{и}$, $\operatorname{tg}^2 \text{и} = 1$, $\operatorname{tg} \text{и} = \pm 1$.

Решим последние уравнения относительно азимутального угла $\text{и} = \frac{\text{р}}{4}$ и $\text{и} = \frac{3\text{р}}{4}$, и учтем, что неравенству $z \ge 0$ соответствует первое из этих уравнений $\text{и} = \frac{\text{р}}{4}$ (верхняя полость конуса).

Координатная плоскость $y = 0$ в сферических координатах задается двумя полуплоскостями: $\text{ц} = 0$ при $x \ge 0$ и $\text{ц} = \text{р}$ при $x \le 0$.

Вид области Щ показан на рисунке 16. В сферической системе координат эту область можно задать неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \le \text{ц} \le \text{р} \\ 0 \le \text{и} \le \dfrac{\text{р}}{4} \\ 0 \le r \le a \end{cases}.$$

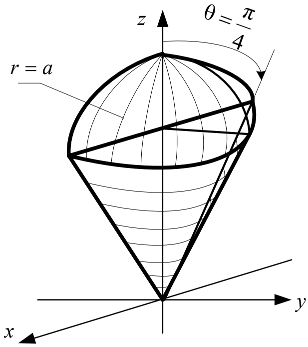

Рис. 16.

Элемент объема dV в сферических координатах имеет вид $dV = r^2 \sin \text{и}\, dr\, d\text{ц}\, d\text{и}$.

Тройной интеграл запишем в сферических координатах.

$$\iiint\limits_{\text{Щ}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV = \iiint\limits_{\text{Щ}} r^2 r^2 \sin \text{и}\, dr\, d\text{ц}\, d\text{и} =$$

$$= \int_0^{\text{р}} d\text{ц} \int_0^{\frac{\text{р}}{4}} \sin \text{и}\, d\text{и} \int_0^{a} r^4\, dr = \text{р}\, \left(-\cos \text{и}\right)\Bigg|_0^{\frac{\text{р}}{4}} \frac{r^5}{5}\Bigg|_0^{a} = \text{р} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \frac{a^5}{5} =$$

$$= \frac{\text{р} a^5}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1.3.7. Механические приложения тройного интеграла

Пусть масса распределена по пространственной области Ш с плотностью $\text{д}(x, y, z)$. Статические моменты тела, занимающего область Ш, координаты центра тяжести этого тела и моменты инерции вычисляются по следующим формулам.

Статические моменты

Относительно координатных осей:

$$S_x = \iiint\limits_{\text{Щ}} \sqrt{y^2 + z^2}\ \text{д}(x, y, z)dV\ ;$$

$$S_y = \iiint\limits_{\text{Щ}} \sqrt{x^2 + z^2}\ \text{д}(x, y, z)dV\ ;$$

$$S_z = \iiint\limits_{\text{Щ}} \sqrt{x^2 + y^2}\ \text{д}(x, y, z)dV\ .$$

Относительно начала координат:

$$S_o = \iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \text{д}(x, y, z)dS\ .$$

Относительно координатных плоскостей:

$$S_{xOy} = \iiint\limits_{\text{Щ}} z\,\text{д}(x, y, z)dV\ ; \quad S_{xOz} = \iiint\limits_{\text{Щ}} y\,\text{д}(x, y, z)dV\ ;$$

$$S_{yOz} = \iiint\limits_{\text{Щ}} x\,\text{д}(x, y, z)dV\ .$$

Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$

$$x_c = \frac{S_{yOz}}{m}; \quad y_c = \frac{S_{xOz}}{m}\ ; \quad z_c = \frac{S_{xOy}}{m}, \text{ или}$$

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\text{Щ}} x\,\text{д}(x, y, z)dV\ , \qquad y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\text{Щ}} y\,\text{д}(x, y, z)dV\ ,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{\text{Щ}} z\,\text{д}(x, y, z)dV\ ,$$

где $m = \iiint\limits_{\text{Щ}} \text{д}(x, y, z)dV$ - масса тела.

Моменты инерции

Относительно начала координат:

$$I_o = \iiint\limits_{\text{Щ}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \text{д}(x, y, z)\, dV \; .$$

Относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_{\text{Щ}} \left(y^2 + z^2\right) \text{д}(x, y, z)\, dV \; ; \quad I_y = \iiint\limits_{\text{Щ}} \left(x^2 + z^2\right) \text{д}(x, y, z)\, dV \; ;$$

$$I_z = \iiint\limits_{\text{Щ}} \left(x^2 + y^2\right) \text{д}(x, y, z)\, dV \; .$$

Относительно координатных плоскостей:

$$I_{xOy} = \iiint\limits_{\text{Щ}} z^2 \, \text{д}(x, y, z)\, dV \; , \qquad I_{xOz} = \iiint\limits_{\text{Щ}} y^2 \, \text{д}(x, y, z)\, dV \; ,$$

$$I_{yOz} = \iiint\limits_{\text{Щ}} x^2 \, \text{д}(x, y, z)\, dV \; .$$

Задача

Вычислить координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $z = y,\ z = 2y,\ y = x^2,\ y = 1$.

Решение

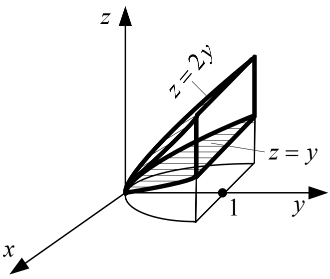

Рис. 17.

Из симметрии тела (рис. 17) ясно, что центр тяжести $C\left(x_c,\, y_c,\, z_c\right)$ лежит в плоскости yOz, то есть $x_c = 0$.

Для определения остальных координат центра тяжести, используем формулы:

$$y_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\text{Щ}} y \, \text{д}(x, y, z)\, dV \; , \qquad z_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\text{Щ}} z \, \text{д}(x, y, z)\, dV \; .$$

где $m = \iiint\limits_{\text{Щ}} \text{д}(x,\, y,\, z)\,dV$ - масса тела.

Тело является однородным, поэтому плотность $\text{д}(x, y, z) \equiv 1$. Тогда масса тела равна $m = \iiint\limits_{\text{Щ}} \text{д}(x,\, y,\, z)\,dV = \iiint\limits_{\text{Щ}} 1\,dV =$

$$= \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{y}^{2y} dz = \iint\limits_{D} dx\,dy\, z \Big|_{y}^{2y} = \iint\limits_{D} (2y - y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} y\,dx\,dy\,.$$

Область D является проекцией области Щ в координатную плоскость $x0y$ (рис. 18).

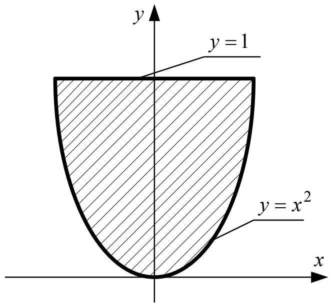

Рис. 18.

Вычислим двойной интеграл, расставив пределы интеграции в декартовых координатах:

$$m = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} y\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{1} = \int\limits_{-1}^{1} dx\left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^4\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Координаты центра тяжести:

$$y_c = \frac{5}{4}\iiint\limits_{\text{Щ}} y\,dV = \frac{5}{4}\iint\limits_{D} ydxdy \int\limits_{y}^{2y} dz = \frac{5}{4}\iint\limits_{D} ydxdy(2y - y) =$$

$$=\frac{5}{4}\iint\limits_D y^2dxdy=\frac{5}{4}\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}y^2dy=\frac{5}{4}\int\limits_{-1}^{1}dx\left.\frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^{1}=$$

$$=\frac{5}{12}\int\limits_{-1}^{1}dx\left(1-x^6\right)=\frac{5}{12}\left.\left(x-\frac{x^7}{7}\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{5}{12}\cdot\frac{12}{7}=\frac{5}{7}.$$

$$z_c=\frac{5}{4}\iiint\limits_{\text{Щ}}z\,dV=\frac{5}{4}\iint\limits_D dxdy\int\limits_y^{2y}z\,dz=\frac{5}{4}\iint\limits_D dxdy\left.\frac{z^2}{2}\right|_y^{2y}=$$

$$=\frac{5}{8}\iint\limits_D\left(4y^2-y^2\right)dxdy=\frac{5}{8}\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}3y^2dy=\frac{5}{8}\int\limits_{-1}^{1}dx\left.y^3\right|_{x^2}^{1}=$$

$$=\frac{5}{8}\int\limits_{-1}^{1}dx\left(1-x^6\right)=\frac{5}{8}\left.\left(x-\frac{x^7}{7}\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{5}{8}\cdot\frac{12}{7}=\frac{15}{14}.$$

Следовательно, центр тяжести тела имеет координаты $C\left(0,\frac{5}{7},\frac{15}{14}\right)$.

2. Криволинейные и поверхностные интегралы 1 рода

2.1. Криволинейный интеграл 1 рода

2.1.1. Определение, механический и геометрический смысл криволинейного интеграла 1 рода. Теорема существования

Определение

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в каждой точке гладкой кривой l. Разобьём участок кривой l от точки A до точки B (рис. 19) произвольным образом на n частей (элементарных дуг) точками $A=M_0, M_1, M_2, \ldots M_i, M_{i+1}, \ldots, M_n=B$.

Обозначим через $\text{Д}l_i$ длину дуги M_iM_{i+1}. На каждой дуге возьмём произвольную точку $P_i\left(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i\right)\in M_iM_{i+1}$, вычислим:

$f\left(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i\right)\cdot \text{Д}l_i$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i\right)\cdot \text{Д}l_i .$$

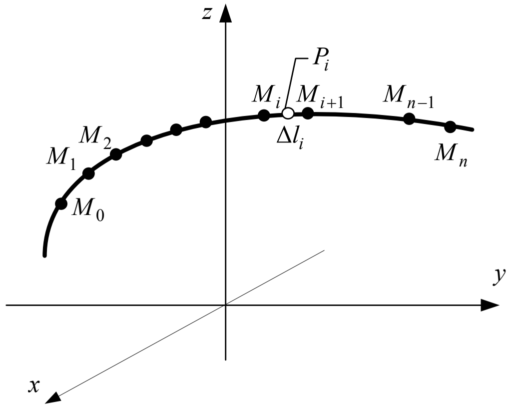

Рис. 19.

Предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и при ранге дробления $\text{д} = \max\limits_i \text{Д}l_i \to 0$, если он существует, конечен, не зависит от способа дробления дуги AB и от выбора точек P_i, называется криволинейным интегралом 1 рода по кривой l от точки A до точки B. Для криволинейного интеграла используется обозначение:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z)dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i\right)\cdot \text{Д}l_i .$$

Функция $f(x, y, z)$ называется при этом ***интегрируемой*** на участке AB кривой l.

Если функция $f(x, y, z) \geq 0$ является распределенной на кривой l переменной плотностью, то интегральная сумма

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i)\cdot \text{Д}l_i$ приближенно равна массе дуги AB кривой l. Масса этой дуги равна пределу интегральной суммы при $n \to \infty$ и при ранге дробления $\text{д} = \max\limits_i \text{Д}l_i \to 0$. В этом состоит механический смысл криволинейного интеграла 1 рода:

$$m = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)dl .$$

Если в последней формуле положить $f(x, y, z) = 1$, то криволинейный интеграл равен длине дуги кривой l от точки A до точки B.

$$l = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} 1 dl .$$

Теорема

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна или кусочно непрерывна на участке AB кривой l, то она на этом участке кривой интегрируема, то есть существует $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)dl$ как предел интегральной суммы.

2.1.2. Свойства криволинейного интеграла 1 рода

1. Криволинейный интеграл 1 рода не зависит от направления пути интегрирования. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на кривой AB, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)dl = \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} f(x, y, z)dl .$$

2. Если кривая AB разбита на части AC и CB, и если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на кривой AB, то:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y, z)dl = \int\limits_{\overset{\smile}{AC}} f(x, y, z)dl + \int\limits_{\overset{\smile}{BC}} f(x, y, z)dl .$$

3. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы на кривой l, а C_1 и C_2 - постоянные, то

$$\int\limits_l \left(C_1 \cdot f(x, y, z) + C_2 \cdot g(x, y, z)\right) dl =$$

$$= C_1 \int\limits_l f(x, y, z) dl + C_2 \int\limits_l g(x, y, z) dl .$$

4. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ непрерывны на кривой l и если $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$ во всех точках кривой, то

$$\int\limits_l f(x, y, z) dl \le \int\limits_l g(x, y, z) dl .$$

5. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на кривой l, то

$$m \cdot l \le \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl \le M \cdot l ,$$

где m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y, z)$ на кривой, а l - длина кривой от точки A до точки B.

6. Если функция $f(x, y, z)$ - непрерывна на кривой $\overset{\cup}{AB}$, то на этой кривой найдется точка $P(x_0, y_0, z_0) \in \overset{\cup}{AB}$, для которой справедливо

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl = f(x_0, y_0, z_0) \cdot l ,$$

где l - длина дуги $\overset{\cup}{AB}$.

2.1.3. Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{д} \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i) \cdot \text{Д} l_i .$$

1. Пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями

Пусть пространственная кривая l задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t);\; y = y(t);\; z = z(t),$$

и участку кривой от точки A до точки B соответствует неравенство: $t_1 \le t \le t_2$.

Будем считать, что точек деления $M_0, M_1, M_2, ...M_i, M_{i+1}, ..., M_n$ достаточно много и дугу $M_i M_{i+1}$ можно приближенно считать отрезком прямой между точками $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$. Тогда ее длина вычисляется по формуле:

$$\text{Д}l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}\ .$$

Применяя терему Лагранжа, получим:

$$x_{i+1} - x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\tilde{t}_i) \cdot \text{Д}t_i\,;$$
$$y_{i+1} - y_i = y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\tilde{t}_i) \cdot \text{Д}t_i\,;$$
$$z_{i+1} - z_i = z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(\tilde{t}_i) \cdot \text{Д}t_i\,,$$

где $\tilde{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Формула для длины дуги примет вид:

$$\text{Д}l_i = \sqrt{(x'(\tilde{t}_i))^2 + (y'(\tilde{t}_i))^2 + (z'(\tilde{t}_i))^2}\,\text{Д}t_i\,.$$

Из этой формулы ясно, что ранг дробления $\text{д} = \max\limits_i \text{Д}l_i \to 0$ при $\max\limits_i \text{Д}t_i \to 0$.

Пусть значению функции $f(x, y, z)$ в точке $P_i(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i)$ соответствует значение параметра $t = \tilde{t}_i$. Тогда, выражая все переменные в интегральной сумме через t и переходя в интегральной сумме к пределу при $n \to \infty$ и при ранге дробления $\text{д} = \max\limits_{i} \text{Д}t_i \to 0$, получим

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,\, y,\, z)\,dl =$$

$$= \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{д} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x(\tilde{t}_i),\, y(\tilde{t}_i),\, z(\tilde{t}_i)\right)\sqrt{\left(x'(\tilde{t}_i)\right)^2 + \left(y'(\tilde{t}_i)\right)^2 + \left(z'(\tilde{t}_i)\right)^2}\,\text{Д}t_i =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),\, y(t),\, z(t)\right)\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\,dt\,.$$

Следовательно, криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу по отрезку $[t_1, t_2]$ от функции $f\left(x(t),\, y(t),\, z(t)\right)\sqrt{\left(x'_t(t)\right)^2 + \left(y'_t(t)\right)^2 + \left(z'_t(t)\right)^2}$.

Задача 1

Вычислить длину одного витка винтовой линии $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = t \end{cases}$.

Решение

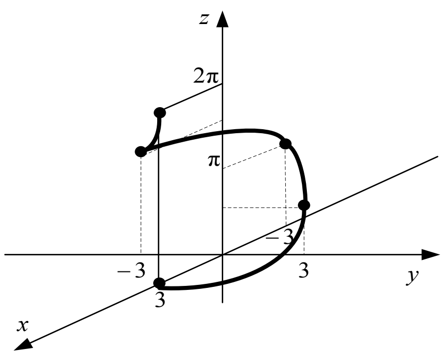

Рис. 20.

Одному витку линии соответствует неравенство $0 \le t \le 2p$ (рис. 20). Продифференцируем параметрические уравнения кривой $\begin{cases} x' = -3\sin t \\ y' = 3\cos t \\ z' = 1 \end{cases}$ и вычислим длину одного витка винтовой линии через криволинейный интеграл

$$l = \int\limits_{l} dl = \int\limits_{0}^{2p} \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t + 1}\, dt = \sqrt{10}\int\limits_{0}^{2p} dt = 2\sqrt{10}\, p .$$

2. Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями

Криволинейный по плоской кривой l, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$; при $t_1 \le t \le t_2$, сводится к определенному интегралу по формуле:

$$\int\limits_{l} f(x, y) dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t); y(t)\right)\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt .$$

Задача 2

Вычислить массу прямолинейного стержня AB, если его плотность в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки и если $A(3; 1)$, $B(2; 3)$.

Решение

По механическому смыслу криволинейного интеграла 1 рода масса стержня равна: $m = \int\limits_{AB} x^2 dl$.

Параметрические уравнения прямой AB: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ где $0 \le t \le 1$. Поскольку $\begin{cases} x' = -1 \\ y' = 2 \end{cases}$, то масса стержня вычисляется через интеграл

$$m = \int\limits_{AB} x^2 dl = \int\limits_0^1 (3-t)^2 \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}\, dt = \sqrt{5}\int\limits_0^1 \left(9 - 6t + t^2\right) dt =$$

$$= \sqrt{5}\left(9t - 3t^2 + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \sqrt{5}\left(9 - 3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{19\sqrt{5}}{3}.$$

3. Плоская кривая, заданная уравнением $y = y(x)$

При таком задании кривой удобно считать параметром переменную x, записывая уравнения кривой в виде

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}.$$

Если на дуге $a \le x \le b$, то формула сведения криволинейного интеграла к определенному интегралу примет вид:

$$\int\limits_l f(x, y) dl = \int\limits_a^b f(x; y(x))\sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx .$$

Задача 3

Вычислить $\int\limits_l x\, dl$, если l - дуга параболы $y = x^2$ от ее вершины до точки $A(1, 1)$.

Решение

$$\int\limits_l x\, dl = \int\limits_0^1 x\sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \tfrac{1}{8}\int\limits_0^1 \left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{2}} 8x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \left(1 + 4x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + 4x^2\right) = \frac{1}{8}\,\frac{\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

4. Плоская кривая, заданная в полярных координатах

Если кривая задана в полярных координатах, то в качестве параметра следует взять полярный угол ц .

Пусть кривая задана полярным уравнением $с = с(ц)$, где $ц_1 \le ц \le ц_2$.

Переходя к интегрированию по переменной $ц$ и учитывая, что $\begin{cases} x = с(ц)\cos ц \\ y = с(ц)\sin ц \end{cases}$, запишем криволинейный интеграл в виде

$$\int\limits_l f(x, y)dl = \int\limits_{ц_1}^{ц_2} f(с(ц)\cos ц,\, с(ц)\sin ц)\sqrt{(x'_ц)^2 + (y'_ц)^2}\,dц \, .$$

Поскольку

$$\begin{cases} x' = с'(ц)\cos ц - с(ц)\sin ц \\ y' = с'(ц)\sin ц + с(ц)\cos ц \end{cases} \text{ и}$$

$$(x'_ц)^2 + (y'_ц)^2 = с^2(ц)(\cos^2 ц + \sin^2 ц) + (с'_ц)^2(\cos^2 ц + \sin^2 ц) =$$

$$= с^2(ц) + (с'_ц)^2,$$

то криволинейный интеграл сведется к определенному интегралу следующего вида:

$$\int\limits_l f(x, y)dl = \int\limits_{ц_1}^{ц_2} f(с(ц)\cos ц,\, с(ц)\sin ц)\sqrt{с^2(ц) + (с'_ц)^2}\,dц \, .$$

Задача 4

Вычислить массу кривой l, если плотность $д(x, y)$ в каждой точке равна расстоянию от нее до начала координат, и если кривая l задана уравнением: $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение

$$m = \int\limits_l д(x, y)dl = \int\limits_l \sqrt{x^2 + y^2}\,dl \, .$$

Приведем уравнение кривой к каноническому виду

$$x^2 + y^2 = 2x\,,\; x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0\,,\; (x-1)^2 + y^2 = 1\,.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(1,\,0)$ и радиусом $R=1$ (рис. 21).

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \text{с}\cos\text{ц} \\ y = \text{с}\sin\text{ц} \end{cases}.$$

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид:

$$\text{с}^2 = 2\text{с}\cos\text{ц} \text{ или } \text{с} = 2\cos\text{ц}\text{, где } -\frac{\text{р}}{2} \le \text{ц} \le \frac{\text{р}}{2}.$$

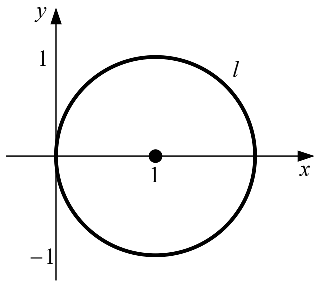

Рис. 21.

$$m = \int\limits_{-\text{р}/2}^{\text{р}/2} \text{с}\,\sqrt{\text{с}^2(\text{ц}) + \left(\text{с}'_{\text{ц}}\right)^2}\,d\text{ц} =$$

$$= \int\limits_{-\text{р}/2}^{\text{р}/2} 2\cos\text{ц}\sqrt{(2\cos\text{ц})^2 + \left((2\cos\text{ц})'\right)^2}\,d\text{ц} =$$

$$= \int\limits_{-\text{р}/2}^{\text{р}/2} 2\cos\text{ц}\cdot\sqrt{4\cos^2\text{ц} + 4\sin^2\text{ц}}\,d\text{ц} = 4\int\limits_{-\text{р}/2}^{\text{р}/2}\cos\text{ц}\,d\text{ц} =$$

$$= 4\sin\text{ц}\Big|_{-\text{р}/2}^{\text{р}/2} = 4(1+1) = 8.$$

2.1.4. Механические приложения криволинейного интеграла 1 рода

Статические моменты дуги AB

Статический момент относительно начала координат:

$$S_0 = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dl\,.$$

Статические моменты относительно координатных осей:

$$S_x = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{y^2 + z^2}\, dl\,. \qquad S_y = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{x^2 + z^2}\, dl\,.$$

$$S_z = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{x^2 + y^2}\, dl\,.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$S_{xOy} = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, z\, dl\,. \qquad S_{xOz} = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, y\, dl\,.$$

$$S_{yOz} = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, x\, dl\,.$$

Координаты центра тяжести дуги AB

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\text{д}(x; y; z)\, dl}{m}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\text{д}(x; y; z)\, dl}{m}; \quad z_c = \frac{\int\limits_{AB} z\text{д}(x; y; z)\, dl}{m},$$

где m - масса дуги.

Моменты инерции дуги AB

Момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl\,.$$

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\left(y^2 + z^2\right) dl\,. \qquad I_y = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \text{д}(x,\, y,\, z)\left(x^2 + z^2\right) dl\,.$$

$$I_z = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} д(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right) dl .$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей:

$$I_{xOy} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} д(x, y, z) z^2 \, dl , \qquad I_{xOz} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} д(x, y, z) y^2 \, dl ,$$

$$I_{yOz} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} д(x, y, z) x^2 \, dl .$$

2.2. Поверхностный интеграл 1 рода

2.2.1. Определение поверхностного интеграла 1 рода. Теорема существования

Определение

Пусть на гладкой поверхности у задана функция $f(x; y; z)$. Разобьём у произвольным образом на n элементарных частей $у_1, у_2, ..., у_n$, площади которых равны $ДS_1, ДS_2, ..., ДS_n$. В каждой части возьмём произвольную точку $M_i(о_i, з_i, ж_i) \in у_i$, вычислим $f(ж_i, з_i, ж_i) \cdot ДS_i$ (рис. 22) и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(о_i, з_i, ж_i) ДS_i$.

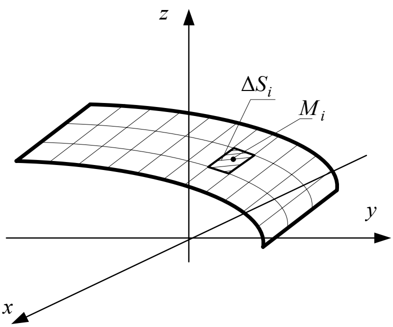

Рис. 22.

Введем ранг дробления $\text{д} = \max_{i} d_i$, где d_i - диаметр элементарной области у_i и перейдем к пределу при $n \to \infty$ и при $\text{д} \to 0$.

Предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и при $\text{д} \to 0$, если он существует, конечен, не зависит от способа дробления поверхности у на элементарные поверхности $\text{у}_1, \text{у}_2, ..., \text{у}_n$ и от выбора точек M_i, называется поверхностным интегралом 1 рода от функции $f(x; y; z)$ по поверхности у. Для поверхностного интеграла 1 рода используется обозначение: $\iint\limits_{\text{у}} f(x, y, z) d\text{у}$.

$$\iint\limits_{\text{у}} f(x, y, z) d\text{у} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{д} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i) \cdot \text{Д}S_i .$$

Функция $f(x; y; z)$ называется при этом ***интегрируемой на поверхности*** у***.***

Теорема

Если функция $f(x; y; z)$ непрерывна или кусочно непрерывна на поверхности у, то она на этой поверхности интегрируема.

2.2.2. Геометрический и механический смысл поверхностного интеграла 1 рода

Если функция $f(x; y; z) \geq 0$ и представляет собой распределенную по поверхности у плотность, то произведение $f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i) \cdot \text{Д}S_i$ приближенно равно массе элементарной поверхности у_i, если она настолько мала, что ее можно считать однородной с плотностью $f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i)$. Тогда интегральная сумма приближенно равна массе поверхности у.

Точный результат получится, если перейти к пределу при $n \to \infty$. Причем количество элементарных поверхностей $\text{у}_1, \text{у}_2, ..., \text{у}_n$ должно неограниченно увеличиваться ($n \to \infty$), а сами элементарные поверхности должны стягиваться в точки ($\lambda = \max\limits_{i} d_i \to 0$). Следовательно,

$$m = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) \cdot d\sigma .$$

Если в последней формуле положить $f(x;y;z) = 1$, то интеграл будет равен площади поверхности σ:

$$S = \iint\limits_{\sigma} 1 \cdot d\sigma .$$

2.2.3. Свойства поверхностного интеграла 1 рода

1. Если функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы на поверхности σ, то

$$\iint\limits_{\sigma} \left(C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f(x, y, z)\right) d\sigma = C_1 \iint\limits_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma +$$

$$+ C_2 \iint\limits_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma .$$

2. Если область σ разбивается на две непересекающиеся поверхности σ_1 и σ_2, и если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на каждой из этих областей, то справедливо равенство

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f(x, y, z) d\sigma .$$

3. Если функции $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ непрерывны на поверхности σ и если для всех точек $(x, y, z) \in \sigma$ выполнено неравенство $f_1(x, y, z) \le f_2(x, y, z)$, то аналогичное неравенство выполняется и для поверхностных интегралов от этих функций, то есть

$$\iint\limits_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma \le \iint\limits_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma .$$

Следствие

Если непрерывная функция $f(x, y, z) \geq 0$ во всех точках $(x, y, z) \in у$, то $\iint\limits_{у} f(x, y, z)\,dу \geq 0$.

4. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности $у$, то для поверхностного интеграла справедливо неравенство:

$$mS \leq \iint\limits_{у} f(x, y, z)\,dу \leq M\,S\,,$$

где m - наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ на поверхности $у$, M - ее наибольшее значение на этой поверхности, а S - площадь поверхности $у$.

5. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности $у$, то на этой поверхности существует такая точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in у$, для которой справедливо:

$$\iint\limits_{у} f(x, y, z)\,dу = f(x_0, y_0, z_0) \cdot S\,,$$

где S - площадь поверхности $у$. Это свойство называется ***теоремой о среднем,*** а значение функции $f(x_0, y_0, z_0)$ называется ***средним значением.***

2.2.4. Вычисление поверхностного интеграла 1 рода.

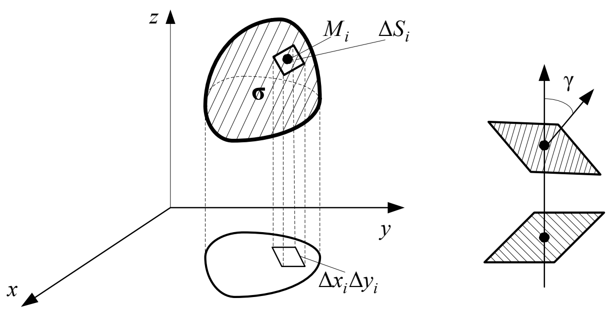

Рис. 23.

Пусть поверхность $у$ однозначно проектируется на какуюлибо координатную плоскость, например на Oxy, в область D. Тогда площадь элемента поверхности $\text{Д}S_i$, если этот элемент достаточно мал и его можно считать плоским с нормалью в точке M_i, связана с площадью проекции этого элемента в декартовых координатах $\text{Д}x_i\text{Д}y_i$ соотношением

$$\text{Д}S_i = \frac{\text{Д}x_i\text{Д}y_i}{\left|\cos \text{г}(M_i)\right|},$$

где $\text{г}(M_i)$ - угол между нормалью к поверхности в точке M_i и осью Oz (рис. 23)

Если поверхность у задана уравнением $z = \text{z}(x; y)$, то вектор нормали в точке M_i равен $\vec{n}(M_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \text{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \text{z}}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$ и косинус угла между этой нормалью и осью Oz вычисляется по формуле:

$$\cos \text{г}(M_i) = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \text{z}}{\partial x}(M_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial \text{z}}{\partial y}(M_i)\right)^2 + 1}}.$$

Тогда

$$\text{Д}S_i = \frac{\text{Д}x_i\text{Д}y_i}{\left|\cos \text{г}(M_i)\right|} = \sqrt{\left(\frac{\partial \text{z}}{\partial x}(M_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial \text{z}}{\partial y}(M_i)\right)^2 + 1} \cdot \text{Д}x_i\text{Д}y_i.$$

Используя определение поверхностного интеграла, запишем

$$\iint\limits_{\text{у}} f(x, y, z)\cdot d\text{у} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{ж}_i)\cdot \text{Д}S_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{д}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\text{о}_i, \text{з}_i, \text{z}(\text{о}_i, \text{з}_i))\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}(\text{о}_i,\text{з}_i)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(\text{о}_i,\text{з}_i)\right)^2+1}\cdot \text{Д}x_i\text{Д}y_i=$$

$$=\iint\limits_D f(x,y,\text{z}(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\,.$$

Следовательно, поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу по формуле

$$\iint\limits_{\text{у}} f(x,\,y,\,z)\cdot d\text{у}=\iint\limits_D f(x,y,\text{z}(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

или

$$\iint\limits_{\text{у}} f(x,\,y,\,z)\cdot d\text{у}=\iint\limits_D f(x,y,\text{z}(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,,$$

где $z=z(x,\,y)$ - уравнение поверхности у, область D – ее проекция в координатную плоскость xOy.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если поверхность у задана неявным уравнением $F(x,\,y,\,z\ )=0$, то $|\cos\text{г}|=\dfrac{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$. Тогда поверхностный интеграл сведется к следующему двойному интегралу

$$\iint\limits_{\text{у}} f(x,y,z)d\text{у}=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}dxdy\,.$$

Задача

Вычислите массу части плоскости $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте, если задана ее плотность $\text{д}(x,\,y,\,x)=\dfrac{1}{(1+x+z)^2}$.

Решение

$$m = \iint_{\text{у}} \frac{d\text{у}}{\left(1+x+z\right)^2},$$

где уравнение поверхности у может быть записано в виде: $z = 1 - x - y$. Поскольку $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, а проекцией плоскости в координатную плоскость xOy является треугольник (рис. 24), то

$$\iint_S \frac{dS}{\left(1+x+z\right)^2} = \iint_D \frac{\sqrt{1+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}}{\left(1+x+\left(1-x-y\right)\right)^2}dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{3}dy}{\left(2-y\right)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 dx \left.\frac{1}{2-y}\right|_0^{1-x} = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right)dx =$$

$$= \sqrt{3}\left.\left(\ln\left(1+x\right) - \frac{1}{2}x\right)\right|_0^1 = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

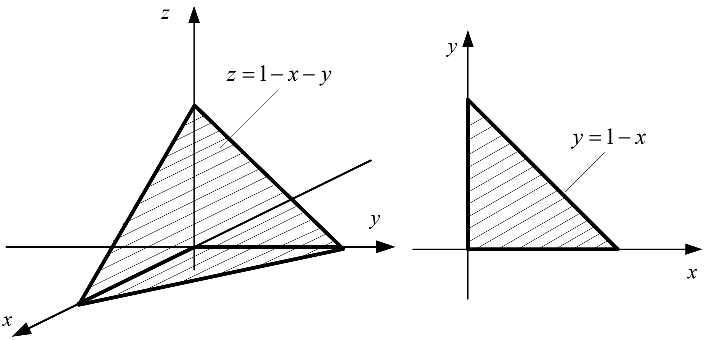

Рис. 24.

2.2.5. Механические приложения поверхностного интеграла 1 рода

Статические моменты участка поверхности у

Статический момент относительно начала координат:

$$S_0 = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d\text{у}\,.$$

Статические моменты относительно координатных осей:

$$S_x = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{y^2 + z^2}\, d\text{у}\,;$$

$$S_y = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{x^2 + z^2}\, d\text{у}\,;$$

$$S_z = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\sqrt{x^2 + y^2}\, d\text{у}\,.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей:

$$S_{xOy} = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, z\, d\text{у}\,;$$

$$S_{xOz} = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, y\, d\text{у}\,;$$

$$S_{yOz} = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, x\, d\text{у}\,.$$

Координаты центра тяжести $C(x_c,\, y_c,\, z_c)$ **поверхности** у

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, x\, d\text{у}}{m}\,; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, y\, d\text{у}}{m}\,;$$

$$z_c = \frac{\iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\, z\, d\text{у}}{m}\,,$$

где m - масса поверхности у .

Моменты инерции поверхности у

Момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) d\text{у}\,;$$

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\left(y^2 + z^2\right)d\text{у}\,;$$

$$I_y = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\left(x^2 + z^2\right)d\text{у}\,;$$

$$I_z = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)\left(x^2 + y^2\right)d\text{у}\,.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей:

$$I_{xOy} = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)z^2 d\text{у}\,; \qquad I_{xOz} = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)y^2 d\text{у}\,;$$

$$I_{yOz} = \iint\limits_{\text{у}} \text{д}(x,\, y,\, z)x^2 d\text{у}\,.$$

Задача

Вычислить координаты центра тяжести однородной поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \le z \le 1$.

Решение

Уравнение $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ задает верхнюю полость конуса. Плоскость $z = 1$ вырезает на ней поверхность у (рис. 25). Поскольку поверхность однородная и является поверхностью вращения вокруг оси Oz, то центр тяжести C лежит на оси Oz, то есть $C(0;\, 0;\, z_0)$.

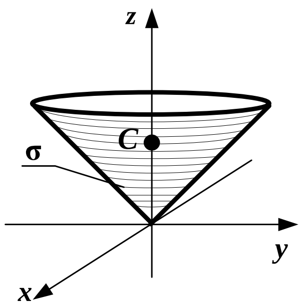

Рис. 25.

Аппликата центра тяжести z_0 определяется формулой:

$$z_0 = \frac{1}{m} \iint\limits_{\mathrm{y}} z d\mathrm{y} ,$$

где m - масса поверхности y .

Так как поверхность однородная, то плотность можно положить равной 1. Тогда

$$m = \iint\limits_{\mathrm{y}} 1 d\mathrm{y} = S_{\mathrm{y}} ,$$

где S_{y} - площадь поверхности y .

Площадь поверхности y можно вычислить, используя формулу для боковой поверхности конуса с высотой $h = 1$ и радиусом основания $R = 1$ и образующей $l = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$$S_{\mathrm{y}} = \mathrm{p} R l = \sqrt{2}\mathrm{p} .$$

Учитывая это, вычислим z_0 .

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{p}} \iint\limits_{\mathrm{y}} z d\mathrm{y} = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{p}} \iint\limits_{D} z \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy ,$$

где D - проекция y на координатную плоскость xOy .

Поверхность y проектируется на плоскость xOy в круг с радиусом 1 (рис. 26).

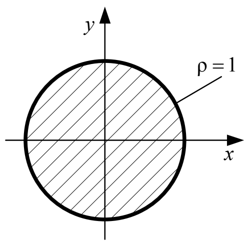

Рис. 26.

Так как $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pi}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\,.$$

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам.

$$z_0=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\rho\cdot\rho\,d\varphi d\rho=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2d\rho=\frac{1}{\pi}\,2\pi\cdot\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}\,.$$

Следовательно, центр тяжести имеет координаты: $C\left(0;\,0;\,\frac{2}{3}\right)$.

3. Теория поля

3.1. Скалярное поле

Пусть в пространстве имеется область D, в которой задана функция $u=u(x;y;z)$. Тогда говорят, что в области D задано ***скалярное поле.*** При этом функцию $u=u(x;y;z)$ называют ***скалярным полем.***

Если, например, $u(x;y;z)=t$ - температура в точке $M(x;y;z)$, то скалярное поле является полем температур.

3.1.1. Поверхности и линии уровня

Определение

Пусть в области D трехмерного пространства задано скалярное поле $u=u(x;y;z)$. Точки области D, в которых скалярное поле $u(x;y;z)$ имеет постоянное значение c, называется ***поверхностями уровня.***

Из определения следует, что уравнениями поверхностей уровня для скалярного поля $u(x;y;z)$ будут уравнения

$$u(x;y;z)=C\ ,$$

где $C=const$.

Задача

Построить поверхности уровня для скалярных полей $u(x;y;z)=x^2+y^2+z^2$ и $V(x;y;z)=x^2+y^2-z$.

Решение

Для скалярного поля $u(x;y;z)=x^2+y^2+z^2$ поверхностями уровня будут концентрические сферы: $x^2+y^2+z^2=C$ с центром в начале координат (рис. 27. а).

Для скалярного поля $V(x;y;z)=x^2+y^2-z$ поверхностями уровня будут параболоиды вращения $z=C-x^2-y^2$ (рис. 27. b).

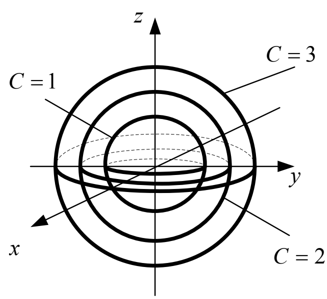

Рис. 27. а

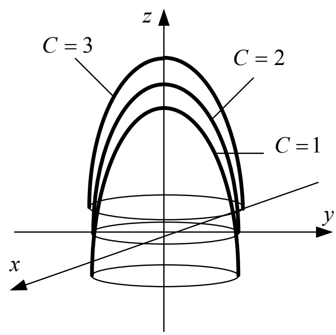

Рис. 27. b

Если в области D на плоскости Oxy задана функция двух переменных $z=u(x;y)$, то линии на плоскости Oxy, заданные уравнениями $u(x;y)=c$, называется ***линиями уровня.***

Линиями уровня поверхности $z=u(x;y)$ на плоскости Oxy будут проекции линий, которые получаются при пересечении этой поверхности плоскостями $z=const$.

Например, линиями уровня в плоскости Oxy поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$ являются окружности $x^2 + y^2 = (1 - c)$ с центром в начале координат и с радиусом: $R = \sqrt{1 - c}$.

3.1.2. Производная по направлению.

Пусть в области D трехмерного пространства задано скалярное поле $U(x; y; z)$ и задан единичный вектор $\vec{l} = \{\cos б; \cos в; \cos г\}$ с началом в точке $M(x; y; z)$ и составляющий с координатными осями углы $б, в, г$.

Рассмотрим точку $M_1(x + Дx;\ y + Дy;\ z + Дz)$ такую, что вектор $\overrightarrow{MM_1} = \begin{pmatrix} Дx \\ Дy \\ Дz \end{pmatrix}$ сонаправлен с вектором $\vec{l}$ и обозначим $Дl = \sqrt{Дx^2 + Дy^2 + Дz^2}$ модуль вектора $\overrightarrow{MM_1}$.

При переходе точки M в точку M_1 в направлении вектора $\vec{l}$ скалярное поле $u = u(x; y; z)$ получит приращение

$$Дu = u(x + Дx;\ y + Дy;\ z + Дz) - u(x;\ y;\ z).$$

Определение

Предел отношения приращения скалярного поля при переходе точки M в точку M_1 в направлении вектора $\vec{l}$ к длине $Дl$ вектора $\overrightarrow{MM_1}$ при $Дl \to 0$, если он существует и конечен, называется производной поля в точке $M(x; y; z)$ по направлению $\vec{l}$. Для производной по направлению используют обозначение

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{Дl \to 0} \frac{Дu}{Дl} .$$

3.1.3. Формула для производной по направлению

Приращение скалярного поля $u(x;y;z)$ в точке $M(x;y;z)$ можно представить в виде:

$$\text{Д}u = \frac{\partial u}{\partial x}\text{Д}x + \frac{\partial u}{\partial y}\text{Д}y + \frac{\partial u}{\partial z}\text{Д}z + \text{е}_1\text{Д}x + \text{е}_2\text{Д}y + \text{е}_3\text{Д}z\ ,$$

где частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ вычисляются в начальной точке $M(x;y;z)$, а ε_1, ε_2, е_3 являются бесконечно малыми при $\text{Д}l \to 0$.

Разделим в этом соотношении каждое слагаемое на $\text{Д}l$ и воспользуемся формулами для направляющих косинусов

$$\frac{\text{Д}x}{\text{Д}l} = \cos\text{б}\,;\ \frac{\text{Д}y}{\text{Д}l} = \cos\text{в}\,;\ \frac{\text{Д}z}{\text{Д}l} = \cos\text{г}\ .$$

В полученном соотношении

$$\frac{\text{Д}u}{\text{Д}l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\text{б} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\text{в} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\text{г} + \text{е}_1\cos\text{б} + \text{е}_2\cos\text{в} + \text{е}_3\cos\text{г}$$

перейдём к пределу при $\text{Д}l \to 0$.

Так как направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{MM_1}$ не зависят от модуля этого вектора, а $\text{е}_1 \to 0$, $\text{е}_2 \to 0$ и $\text{е}_3 \to 0$ при $\text{Д}l \to 0$, то для производной по направлению получим формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\text{б} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\text{в} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\text{г}\ .$$

Задача

Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(1;\,1;\,1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\text{б} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\text{в} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\text{г}\ .$$

Вычислим частные производные поля в точке $M(1;\,1;\,1)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,;\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y\,;\ \frac{\partial u}{\partial z}=2z\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1;\,1;\,1)=\frac{\partial u}{\partial y}(1;\,1;\,1)=\frac{\partial u}{\partial z}(1;\,1;\,1)=2\,.$$

Найдём направляющие косинусы вектора $\vec{l}$

$$\cos\text{б}=\frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{2}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{2}{3};\ \cos\text{в}=\frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{1}{3};\ \cos\text{г}=\frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{2}{3}\ \text{и}$$

вычислим производную $\dfrac{\partial u}{\partial l}=2\cdot\dfrac{2}{3}+2\cdot\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ равна скорости изменения поля в направлении вектора $\vec{l}$.

Если $\dfrac{\partial u}{\partial l}>0$, то поле возрастает в направлении вектора $\vec{l}$, а если $\dfrac{\partial u}{\partial l}<0$, то поле в этом направлении убывает.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ являются производными по направлению координатных осей и задают скорость изменения функции в направлениях осей Ox; Oy; Oz.

3.1.4. Градиент

Определение

Градиентом скалярного поля $u(x;y;z)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные поля по переменным x, y, z. Для градиента используют обозначение:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Градиент является функциональным вектором. Его модуль и направление зависит от точки, в которой он рассматривается.

Теорема

Производная скалярного поля $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке $M(x; y; z)$ по направлению $\vec{l}$ равна проекции градиента поля в точке M на вектор $\vec{l}$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{Пр}_{\vec{l}}\,\text{grad } u(M).$$

Доказательство

Нормируем вектор $\vec{l}$:

$$\vec{e} = \frac{l_x}{|\vec{l}|}\vec{i} + \frac{l_y}{|\vec{l}|}\vec{j} + \frac{l_z}{|\vec{l}|}\vec{k} = \cos\text{б}\,\vec{i} + \cos\text{в}\,\vec{j} + \cos\text{г}\,\vec{k}\ .$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \vec{e}) = \frac{(\text{grad } u, \vec{l})}{|\vec{l}|} = \text{Пр}_{\vec{l}}\ \text{grad}\, u$.

3.1.5. Свойства градиента

1. Градиент показывает направление наибольшего возрастания поля в данной точке.

Доказательство

Так как $\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot \cos\text{б}$, где б - угол между градиентом и вектором $\vec{l}$ (рис. 28), то самое большое значение производной получим, если $\cos\text{б} = 1$, то есть при $\vec{l} \uparrow\uparrow \text{grad}\, u$.

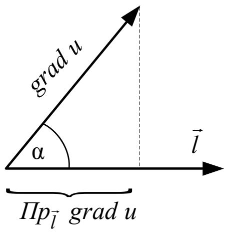

Рис. 28.

2. Модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания поля в данной точке.

Доказательство

следует из того, что скорость в направлении градиента принимает наибольшее значение и равна $\max \dfrac{\partial u}{\partial l} = \left|\operatorname{grad}\, u\right|$.

3. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

Доказательство

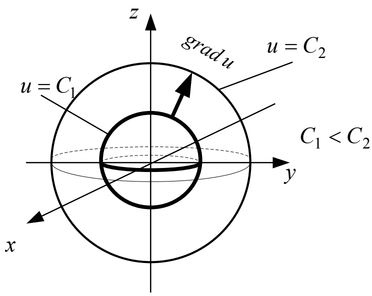

Рис. 29.

Через каждую точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ можно провести поверхность уровня, заданную уравнением $u(x; y; z) = u(x_0; y_0; z_0)$. Тогда вектор

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} u(M_0)$$

направлен по нормали к этой поверхности (рис. 29).

ЗАМЕЧАНИЕ

Поскольку любая поверхность, заданная уравнением $u(x;y;z)=C$ является поверхностью уровня скалярного поля $u(x;y;z)$, то вектор нормали к этой поверхности в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид: $\vec{n} = \operatorname{grad} u(M_0)$.

Задача

Найти направление наискорейшего возрастания поля $u = xy + \frac{z}{y}$ в точке $M(1;\,2;\,1)$ и наибольшую скорость возрастания в этой точке.

Решение

Направление наискорейшего возрастания поля в данной точке показывает градиент, вычисленный в этой точке.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = y\vec{i} + \left(x - \frac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \frac{1}{y}\vec{k}.$$

$$\operatorname{grad} u(M) = 2\vec{i} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} = 2\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания поля в данной точке равна модулю градиента, вычисленного в этой точке.

$$V_{\text{наиб.}} = \left|\operatorname{grad} u(M)\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{64+9+4}{16}} = \frac{\sqrt{77}}{4}.$$

3.2. Векторное поле

3.2.1. Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Вектор $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, координатами которого являются функции $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$, называется ***векторной функцией*** переменной t.

Пусть линия l задана в пространстве параметрическими уравнениями $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$. Если начало вектора $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ при всех значениях t находится в точке $O(0,0,0)$, то его конец при изменении t движется по кривой l (рис. 30).

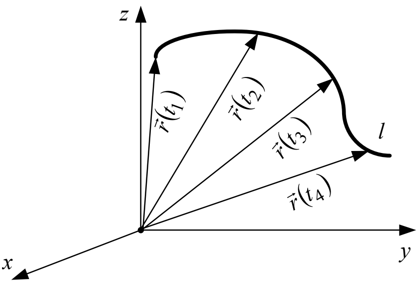

Рис. 30.

Кривая, которую описывает вектор $\vec{r}(t)$, называется ***годографом.***

3.2.2. *Производная векторной функции скалярного аргумента*

Определение

Производной векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел отношения вектора приращения функции $\Delta\vec{r}(t)$ к приращению аргумента Δt при $\Delta t \to 0$, то есть

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Теорема 1

Если координаты векторной функции $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ дифференцируемы, то вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ имеет вид:

$$\vec{r}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Доказательство

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = = \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2

Вектор $\vec{r}'(t_0)$ направлен по касательной к годографу в точке, соответствующей значению $t = t_0$, в сторону возрастания переменной t.

Доказательство

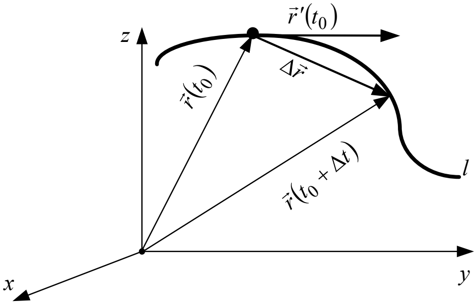

Рис. 31.

Вектор $\text{Д}\vec{r} = \vec{r}\left(t_0 + \text{Д}t\right) - \vec{r}\left(t_0\right) = \overrightarrow{AB}$ (рис. 31) направлен в сторону точки B, соответствующей значению $t = t_0 + \text{Д}t$. Вектор $\dfrac{\text{Д}\vec{r}}{\text{Д}t} = \dfrac{\vec{r}\left(t_0 + \text{Д}t\right) - \vec{r}\left(t_0\right)}{\text{Д}t}$ направлен в сторону точки B при $\text{Д}t > 0$. При $\text{Д}t < 0$ этот вектор направлен в сторону точки A, соответствующей значению $t = t_0$. Следовательно, вектор $\dfrac{\text{Д}\vec{r}}{\text{Д}t}$ направлен в сторону возрастания переменной t.

Если $\text{Д}t \to 0$, то точка B, двигаясь по годографу, стремится к точке A, а вектор $\dfrac{\text{Д}\vec{r}}{\text{Д}t}$ займет положение вектора, касательного к годографу в точке A, соответствующей значению $t = t_0$.

3.2.3. Векторное поле. Векторные линии

Определение 1

Если в каждой точке $M \in D$ задан вектор $\vec{a} = \vec{a}\left(M\right)$, то говорят, что в области D задано векторное поле. Область D называется ***векторным полем.*** Векторным полем называют также и вектор $\vec{a}$.

Если в пространстве введена прямоугольная декартова система координат, то

$$\vec{a}(M) = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k}$$ -

вектор-функция переменных x, y, z, являющихся координатами точки $M(x, y, z)$. При этом предполагается, что функции $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$ и $a_z(x, y, z)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным.

Определение 2

Точка P называется точкой дифференцируемости векторного поля $\vec{a}$, если функции $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$ и $a_z(x, y, z)$, являющиеся его координатами, дифференцируемы в точке P.

Определение 3

Векторными линиями векторного поля $\vec{a}$ называются линии, в каждой точке которых вектор поля $\vec{a}$ направлен по касательной.

Теорема

Пусть векторная линия l задана параметрическими уравнениями: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ и функции $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ - дифференцируемы. Тогда уравнение векторных линий данного поля имеет вид:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Доказательство

Поскольку по касательной к векторной линии направлен и вектор поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(x, y, z) \\ a_y(x, y, z) \\ a_z(x, y, z) \end{pmatrix}$, то векторы $\vec{r}'(t)$ и $\vec{a}$ коллинеарные. Используя условие коллинеарности, получим

$$\frac{x'(t)}{a_x} = \frac{y'(t)}{a_y} = \frac{z'(t)}{a_z}.$$

Умножая все соотношения на $\text{Д}t$, запишем последнее соотношение в виде:

$$\frac{x'(t) \cdot \text{Д}t}{a_x} = \frac{y'(t) \cdot \text{Д}t}{a_y} = \frac{z'(t) \cdot \text{Д}t}{a_z},$$

из которого следует дифференциальные уравнения векторных линий поля $\vec{a}$.

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Определение 4

Поверхности, образованные векторными линиями поля, называются **векторными трубками.**

Задача

Найдите векторные линии векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} + x\vec{j} - 2\vec{k}$.

Решение

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} \text{ или } \begin{cases} xdx = 2y\,dy \\ dz = 0 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1 \\ z = c \end{cases}.$$

Векторными линиями являются гиперболы, расположенные в плоскости $z = C$.

3.2.4. Криволинейный интеграл 2 рода

Определение 1

Пусть в некоторой области D трехмерного пространства задано векторное поле $\vec{a}$, и пусть в области D задана гладкая кривая l. Разобьем произвольным образом кривую l между точками A и B на n частей точками

$A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B$. На каждом из полученных участков между точками $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ выберем произвольно точку P_i и вычислим значение векторного поля в ней $\vec{a}(P_i)$ (рис. 32).

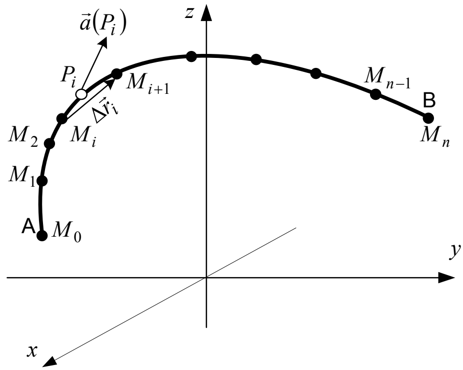

Рис. 32.

Рассмотрим вектор $\Delta\vec{r}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \\ z_{i+1} - z_i \end{pmatrix}$ и вычислим скалярное произведение $(\vec{a}(P_i), \Delta\vec{r}_i)$. Проделаем это для всех участков кривой и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\vec{a}(P_i), \Delta\vec{r}_i).$$

Предел такой интегральной суммы при $n \to \infty$ и при $\max\limits_i |\Delta\vec{r}_i| \to 0$, если он существует, конечен, не зависит от способа дробления участка AB кривой l на части и от выбора точек P_i, называется криволинейным интегралом второго рода от векторной функции $\vec{a}$ вдоль кривой l от точки A до точки B и обозначается $\int\limits_l (\vec{a}, d\vec{r})$.

Из определения следует, что:

$$\int\limits_l (\vec{a}, d\vec{r}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i |\text{Д}\vec{r}_i| \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} (\vec{a}(P_i), \text{Д}\vec{r}_i).$$

Учитывая координаты вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(x, y, z) \\ a_y(x, y, z) \\ a_z(x, y, z) \end{pmatrix}$ и обозначая координаты вектора $d\vec{r}$ следующим образом $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$, криволинейный интеграл второго рода можно записать в виде:

$$\int\limits_l (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_l a_x dx + a_y dy + a_z dz \text{ или}$$

$$\int\limits_l (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_l a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz .$$

Определение 2

Интеграл по замкнутой кривой l называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ и обозначается $\oint\limits_l (\vec{a}, d\vec{r})$.

3.2.5. Работа в векторном поле

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\vec{a}(P_i), \text{Д}\vec{r}_i)$$

и будем считать, что участки M_iM_{i+1}, на которые разбита кривая l, достаточно малы, чтобы и их можно считать отрезками прямых между точками $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$, а векторное поле считать на всем участке $M_i M_{i+1}$ постоянным и равным $\vec{a}(P_i)$.

Тогда скалярное произведение $\left(\vec{a}(P_i), \text{Д}\vec{r}_i\right)$ будет равно работе векторного поля $\vec{a}(P_i)$ на участке $M_i M_{i+1}$, а интегральная сумма приближенно будет равна работе векторного поля $\vec{a}$ вдоль кривой l от точки A до точки B.

Точный результат мы получим, если перейдем в интегральной сумме к пределу при $n \to \infty$ и при $\max\limits_i \left|\text{Д}\vec{r}_i\right| \to 0$.

Поэтому работа, которую производит векторное поле $\vec{a}$ вдоль кривой l от точки A до точки B, вычисляется через криволинейный интеграл второго рода:

$$A = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz .$$

3.2.6. Свойства криволинейного интеграла второго рода

1. При изменении направления интегрирования интеграл меняет свой знак: $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} (\vec{a}, d\vec{r})$.

2. Для циркуляции по замкнутой кривой выбор точки начала обхода безразличен.

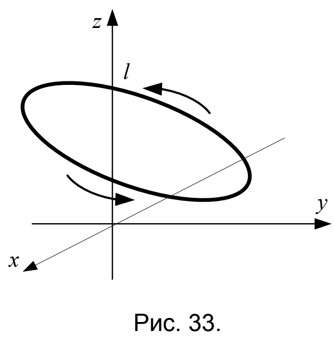

Рис. 33.

Положительным направлением обхода считается то, при котором область, ограниченная этой кривой остаётся слева (рис.33).

Остальные свойства криволинейного интеграла второго рода имеют такой же вид, как и для криволинейного интеграла первого рода.

3.2.6. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Если кривая l задана параметрическими уравнениями: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, и функции $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ - дифференцируемы, причём точке A соответствует значение параметра t_1, а точке B - значение параметра t_2, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[a_x(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t)) y'(t) +$$

$$+ a_z(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \Big] dt .$$

Задача

Вычислить работу векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ вдоль отрезка прямой AB, если $A(1; 1; 1)$, $B(2; 4; 5)$.

Решение

Работа в векторном поле вычисляется через криволинейный интеграл второго рода:

$$A = \int\limits_{AB} (\vec{a}, dr) = \int\limits_{AB} y dx + x dy + (x - y) dz .$$

Уравнение прямой AB запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = 4t + 1 \end{cases}$$

и вычислим производные от функций $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 3 \\ z' = 4 \end{cases}.$$

Пределы интегрирования для переменной t определим, учитывая, что при переходе от точки A к точке B функция $x = x(t)$ меняется от 1 до 2. Тогда $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

Следовательно, $A = \int\limits_{AB} ydx + xdy + (x - y)dz =$

$$= \int\limits_0^1 \left[(3t+1)\cdot 1 + (t+1)\cdot 3 + (t + 1 - 3t - 1)\cdot 4\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (-2t + 4)dt = \left(-t^2 + 4t\right)\Big|_0^1 = 3 .$$

3.2.7. Криволинейный интеграл второго рода на плоскости

Пусть векторное поле $\vec{a} = a_x(x, y)\vec{i} + a_y(x, y)\vec{j}$ задано в некоторой области D на плоскости, на которой задана декартова система координат xOy. Тогда криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой l, расположенной в координатной плоскости xOy, имеет вид

$$\int\limits_l (\vec{a}, dr) = \int\limits_l a_x(x, y)dx + a_y(x, y)dy .$$

Если криволинейный интеграл вычисляется от точки A до точки B и если плоская кривая l задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где значение параметра $t = t_1$ соответствует точке A, то есть $\begin{cases} x_A = x(t_1) \\ y_A = y(t_1) \end{cases}$, а значение параметра $t = t_2$ соответствует точке B, то есть $\begin{cases} x_B = x(t_2) \\ y_B = y(t_2) \end{cases}$.

Тогда криволинейный интеграл по кривой l на участке AB сводится к определенному интегралу по переменной t по следующей формуле:

$$\int_l (\vec{a}, dr) = \int_{t_1}^{t_2} \left[a_x(x(t), y(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t))x'(t) \right] dt .$$

Задача

Вычислите $\int_l \left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, где l парабола $y = x^2$ от начала координат $O(0, 0)$ до точки $A(1; 1)$.

Решение

Зададим кривую l параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \end{cases}$. На участке параболы OA выполняется неравенство $0 \le x \le 1$, откуда следует, что $0 \le t \le 1$.

Учитывая это, криволинейный интеграл можно свести к определенному интегралу.

$$\int_l \left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int_0^1 \left[\left(t^2 + 2t^3\right)\cdot 1 + \left(t^4 - 2t^3\right)\cdot 2t\right]dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 + 2t^3 + 2t^5 - 4t^4\right)dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} - 4\cdot\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{30}.$$

3.2.8. Формула Грина

Теорема

Если D - плоская область, ограниченная замкнутой кривой l, а координаты векторной функции $a_x(x; y)$ и $a_y(x; y)$

непрерывны в области D вместе со своими частными производными, то справедлива формула

$$\oint\limits_{l} a_x(x;y)dx + a_y(x;y)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy,$$

которая называется ***формулой Грина***.

Доказательство

Обозначим $I_1 = \iint\limits_{D}\frac{\partial a_x}{\partial y}dxdy$ и вычислим этот двойной интеграл, сведя его к повторному интегралу и расставляя для области D пределы, считая x переменной внешнего интегрирования (рис.34).

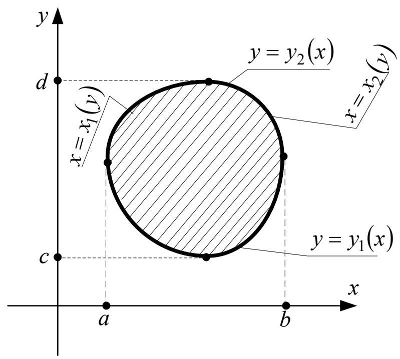

Рис. 34.

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}.$$

$$I_1 = \iint\limits_{D}\frac{\partial a_x}{\partial y}dxdy = \int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial a_x}{\partial y}dy = \int\limits_{a}^{b}a_x(x;y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b}\left[a_x(x;y_2(x)) - a_x(x;y_1(x))\right]dx = \int\limits_{\overset{\cup}{ADB}} a_x dx - \int\limits_{\overset{\cup}{ACB}} a_x dx =$$

$$= \int_a^b a_x(x; y_2(x))dx + \int_b^a a_x(x; y_1(x))dx = \int\limits_{\overset{\cup}{ADB}} a_x dx + \int\limits_{\overset{\cup}{BCA}} a_x dx =$$

$= -\oint_l a_x dx$, поскольку кривая l обходится в отрицательном направлении $ADBCA$.

Обозначим $I_2 = \iint_D \frac{\partial a_y}{\partial x} dxdy$ и вычислим этот интеграл, задавая область интегрирования неравенствами:

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}.$$

$$I_2 = \iint_D \frac{\partial a_y}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial a_y}{\partial x} dx =$$

$$= \int_c^d \left(a_y(x_2(y), y) - a_y(x_1(y), y) \right) dy =$$

$$= \int_c^d a_y(x_2(y), y)dy + \int_d^c a_y(x_1(y), y)dy = \int\limits_{\overset{\cup}{CBD}} a_y dy - \int\limits_{\overset{\cup}{CAB}} a_y dy =$$

$$= \int\limits_{\overset{\cup}{CBD}} a_y dy + \int\limits_{\overset{\cup}{DAC}} a_y dy = \oint_l a_y(x, y) dy.$$

Вычислим криволинейный интеграл, складывая интегралы $-I_1$ и I_2, и получим формулу Грина.

$$I_2 - I_1 = \oint_l a_x dx + a_y dy = \iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy.$$

Задача

Вычислите криволинейный интеграл, используя формулу Грина $\oint_l (x^2 + 2y)dx + (y^2 - 2x)dy$, где l эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Решение

По формуле Грина $\oint\limits_{l}\left(x^2+2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy=$

$$=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial\left(y^2-2x\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(x^2+2y\right)}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{D}(-4)dxdy=$$

$$=-4\iint\limits_{D}1\,dxdy=-4\cdot S_{\text{эллипса}}=-4\text{р}ab.$$

Поскольку полуоси эллипса равны $a=3$, $b=2$, то

$$\oint\limits_{l}\left(x^2+2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy=-24\text{р}.$$

3.2.9. Поверхностный интеграл второго рода. Поток векторного поля через поверхность

Определение

Пусть D - область трехмерного пространства, в которой задано векторное поле

$$\vec{a}=a_x(x;y;z)\vec{i}+a_y(x;y;z)\vec{j}+a_z(x;y;z)\vec{k}$$

и пусть у - гладкая поверхность в области D, на которой задана единичная нормаль $\vec{n}=\{\cos\text{б};\cos\text{в};\cos\text{г}\}$.

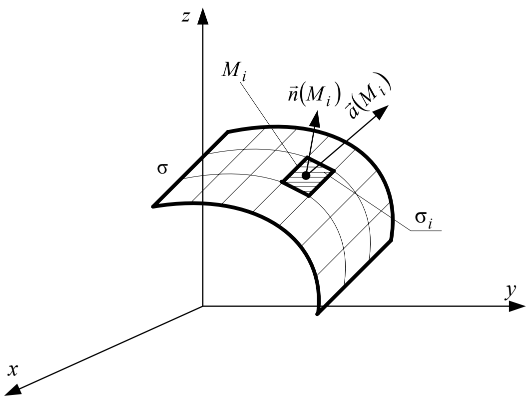

Рис. 35.

Разобьем поверхность $у$ на n частей $у_1, у_2, \dots, у_n$ (элементарных поверхностей) и выберем на каждой элементарной поверхности $у_i$ произвольно точку $M_i(о_i, з_i, ж_i) \in у_i$. Вычислим значение векторной функции в выбранной точке

$$\vec{a}(P_i) = a_x(о_i; з_i; ж_i)\vec{i} + a_y(о_i; з_i; ж_i)\vec{j} + a_z(о_i; з_i; ж_i)\vec{k}$$

и зададим в этой точке единичную нормаль $\vec{n}(M_i) = \vec{n}\{\cos б_i; \cos в_i; \cos г_i\}$ (рис. 35).

Вычислим скалярное произведение $(\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i))$ и, обозначив через $Ду_i$ площадь $у_i$, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot Ду_i .$$

Предел этой суммы при $n \to \infty$ и $\max\limits_i Ду_i \to 0$, если он существует, конечен, не зависит от способа разбиения поверхности $у$ на элементарные участки $у_i$ и от выбора точек M_i, называется поверхностным интегралом второго рода или потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность $у$ в направлении нормали $\vec{n}$. Для потока используют обозначение

$$\iint\limits_{у} (\vec{a}, \vec{n})\, dу = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_i Ду_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot Ду_i .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Если поверхностный интеграл вычисляется по замкнутой поверхности $у$, то для него используют обозначение $\oiint\limits_{у} (\vec{a}, \vec{n})\, dу$.

3.2.10. Физический смысл потока

Пусть $\vec{a}$ - поле скоростей движущейся жидкости. Вычислим количество жидкости, протекающей через поверхность $у$ в направлении нормали $\vec{n}$ в единицу времени.

Если участок поверхности $у_i$, включающий точку M_i достаточно мал, то его можно считать плоским, а поле $\vec{a}$ на нем и единичную нормаль $\vec{n}$ - постоянными и равными $\vec{a}(M_i)$ и $\vec{n}(M_i)$.

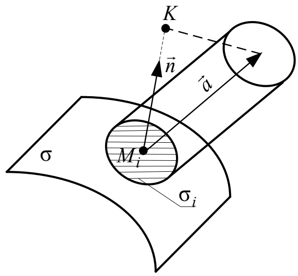

Рис. 36.

При таких предположениях количество протекающей через участок поверхности $у_i$, равно объему цилиндра с основанием $Ду_i$ и высотой $h = (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i))$, то есть $(\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot Ду_i$ (рис. 36).

Следовательно, количество жидкости, протекающей через всю поверхность $у$, в направлении нормали $\vec{n}$ в единицу времени равно

$$P = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max\limits_i Ду_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(M_i), \vec{n}(M_i)) \cdot Ду_i = \iint\limits_{у} (\vec{a}, \vec{n}) dу .$$

В этом состоит физический смысл потока или поверхностного интеграла второго рода.

3.2.11. Свойства поверхностного интеграла второго рода

1. Поверхностный интеграл второго рода меняет знак, если меняется направление нормали, то есть

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n}_1)\, d\text{у} = -\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n}_2)\, d\text{у}\ ,$$

если $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$.

2. Поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n})\, d\text{у}$ равен количеству вещества, проходящего через поверхность у в единицу времени в направлении нормали $\vec{n}$.

Все остальные свойства поверхностного интеграла первого рода выполняются и для поверхностного интеграла второго рода.

3.2.12. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Пусть задано векторное поле $\vec{a}$ и требуется вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n})\, d\text{у}$, в котором интегрирование ведется по поверхности у в направлении заданной единичной нормали $\vec{n}$.

Пусть уравнение поверхности у имеет вид $z = z(x; y)$ и эта поверхность однозначно проектируется на область D в плоскости xOy.

Записывая уравнение поверхности у в виде $z(x; y) - z = 0$, определим единичную нормаль к поверхности по формуле

$$\vec{n} = \pm \frac{\operatorname{grad} F}{\left|\operatorname{grad} F\right|}\ ,$$

где $F(x, y, z) = z(x; y) - z$, а знак выбирается по следующему правилу:

знак плюс берется, если $\operatorname{grad} F \uparrow\uparrow \vec{n}$,

знак минус – если $\operatorname{grad} F \uparrow\downarrow \vec{n}$.

Поскольку $\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$, а $\left|\operatorname{grad} F\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$, то

поверхностный интеграл можно записать в виде:

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n})\, d\text{у} = \pm \iint\limits_{\text{у}} \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\operatorname{grad} F\right|} d\text{у} \quad \text{или}$$

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n})\, d\text{у} = \pm \iint\limits_{\text{у}} \frac{a_x(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) + a_y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}(x,\, y,\, z) -}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\frac{-\,a_z(x,y,z)}{} d\text{у}\ .$$

Полученный поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{a_x \frac{\partial z}{\partial x} + a_y \frac{\partial z}{\partial y} - a_z}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ по поверхности у сведем к двойному интегралу по области D – проекции у в координатную плоскость xOy. Для этого представим $d\text{у} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy$ и сократим подынтегральное выражение на множитель $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$. Получим

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n})\, d\text{у} = \pm \iint\limits_{D} \left(a_x(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x} + a_y(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y} - a_z \right) dxdy$$

или

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n})\, d\text{у} = \pm \iint\limits_{D} (\vec{a}, \operatorname{grad} F)\, dxdy\, .$$

Если поверхность у задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, то, проектируя ее на координатную плоскость xOy в область D_{xy}, получим

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a},\vec{n})d\text{у} = \pm \iint\limits_{D_{xy}} \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dxdy\,;$$

проектируя ее на координатную плоскость xOz в область D_{xz}, получим

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a},\vec{n})d\text{у} = \pm \iint\limits_{D_{xz}} \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|} dxdz\,;$$

проектируя ее на координатную плоскость yOz в область D_{yz}, получим

$$\iint\limits_{\text{у}} (\vec{a},\vec{n})d\text{у} = \pm \iint\limits_{D_{yz}} \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dydz\,.$$

Во всех этих формулах следующее правило выбора знака:

знак плюс берется, если $\operatorname{grad} F \uparrow\uparrow \vec{n}$,

знак минус – если $\operatorname{grad} F \uparrow\downarrow \vec{n}$.

Задача

Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ через замкнутую поверхность у: $x - y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в направлении внешней нормали (рис. 37).

Решение

Поток через замкнутую поверхность у разделим на четыре потока через ее границы (рис. 37):

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4\,.$$

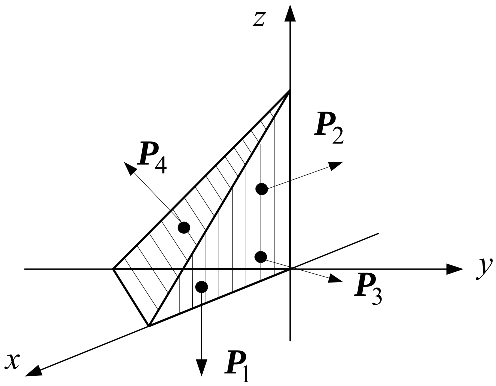

Рис. 37.

$$P_1 = \iint\limits_{\text{у}_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1\right) d\text{у} .$$

Уравнение поверхности у_1: $z = 0$; единичная нормаль $\vec{n}_1 = -\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\left(\vec{a}, \vec{n}_1\right) = -y$. у_1 – область в плоскости xOy, являющаяся треугольником, ограниченным координатными осями и прямой $x - y = 1$ (рис. 38).

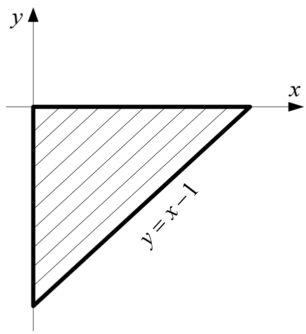

Рис. 38.

Тогда

$$P_1=\iint\limits_{\text{у}_1}(\vec{a},\vec{n}_1)d\text{у}=-\iint\limits_{D_1}ydxdy=-\int\limits_0^1dx\int\limits_{x-1}^0ydy=$$

$$=-\int\limits_0^1dx\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x-1}^0=\int\limits_0^1\frac{(x-1)^2}{2}dx=\frac{(x-1)^3}{6}\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

$$P_2=\iint\limits_{\text{у}_2}(\vec{a},\vec{n}_2)d\text{у}.$$

Уравнение поверхности у_2: $x=0$; единичная нормаль $\vec{n}_2=-\vec{i}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$; $(\vec{a},\vec{n}_2)=-z$. у_2 – плоская область в плоскости yOz, являющаяся треугольником, ограниченным координатными осями и прямой $z-y=1$ (рис. 39).

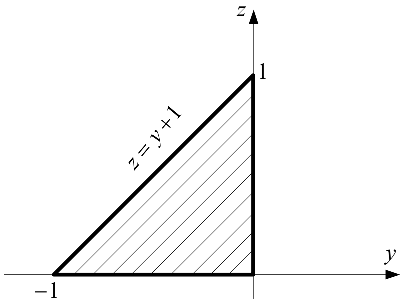

Рис. 39.

Тогда

$$P_2=\iint\limits_{\text{у}_2}(\vec{a},\vec{n}_2)d\text{у}=-\int\limits_{-1}^0dy\int\limits_0^{1+y}zdz=-\int\limits_{-1}^0dy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1+y}=$$

$$=-\int\limits_{-1}^0\frac{(1+y)^2}{2}dy=-\left(\frac{(1+y)^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^0=-\frac{1}{6}.$$

$$P_3 = \iint\limits_{\text{у}_3} (\vec{a}, \vec{n}_3)\, d\text{у}$$

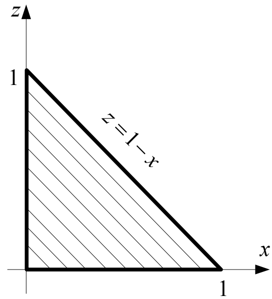

Рис. 40.

Уравнение поверхности у_3: $y = 0$; единичная нормаль $\vec{n}_3 = \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $(\vec{a}, \vec{n}_3) = x$. у_3 – плоская область в плоскости xOz, являющаяся треугольником, ограниченным координатными осями и прямой $x + z = 1$ (рис. 40).

Тогда

$$P_3 = \iint\limits_{\text{у}_3} (\vec{a}, \vec{n}_3)\, d\text{у} = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{1-x} dz = \int\limits_0^1 x\,dx (z)\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 x(1 - x)\,dx = \int\limits_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P_4 = \iint\limits_{\text{у}_4} (\vec{a}, \vec{n}_4)\, d\text{у}$$

Уравнение поверхности у_4: $x - y + z = 1$;

$$F(x, y, z) = x - y + z,\ grad\, F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проекцией поверхности у_4 в координатную плоскость xOy является область D на рисунке 38. Тогда

$$P_4 = \iint\limits_{\text{у}_4} (\vec{a}, \vec{n}_4) d\text{у} = \iint\limits_D \frac{(\vec{a}, grad\, F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dxdy = \iint\limits_D \frac{z - x + y}{1} dxdy\,.$$

Учитывая, что на поверхности у_4 $z = 1 - x + y$, получим

$$P_4 = \iint\limits_D \frac{1 - x + y - x + y}{1} dxdy = \iint\limits_D (1 - 2x + 2y) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^0 (1 - 2x + 2y) dy = \int\limits_0^1 dx \left(y - 2xy + y^2\right)\Big|_{x-1}^{0} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\left(x - 1 - 2x(x-1) + (x-1)^2\right)\right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 - x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\,.$$

Складывая все потоки, вычислим поток через замкнутую поверхность $P = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$.

3.2.13. Дивергенция векторного поля. Теорема Гаусса – Остроградского.

Определение

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ *в* точке дифференцируемости M называется скалярная величина, которая обозначается $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ и которая вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x}(M) + \frac{\partial a_y}{\partial y}(M) + \frac{\partial a_z}{\partial z}(M).$$

Задача 1

Вычислите дивергенцию векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + 3z\vec{k}$ в точке $M(1,-2,0)$.

Решение

Дивергенция векторного поля в произвольной точке дифференцируемости поля равна:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 2x - 2y + 3 .$$

Вычислим значение дивергенции в точке $M(1,-2,0)$.

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = 2 + 4 + 3 = 9 .$$

Теорема Гаусса - Остроградского

Если координаты векторного поля $\vec{a}$, т.е. функции $a_x(x;y;z)$; $a_y(x;y;z)$ и $a_z(x;y;z)$ - непрерывны в области V, ограниченной поверхностью у, вместе со своими частными производными первого порядка, то поток векторного поля через замкнутую поверхность у равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области V.

$$\oiint\limits_{у} (\vec{a}, \vec{n})\,dу = \iiint\limits_{V} div\,\vec{a}\; dxdydz \;,$$

где у - граница области V и нормаль $\vec{n}$ – внешняя.

Доказательство

Рассмотрим тройной интеграл от дивергенции поля $\vec{a}$ по области V

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{a}\; dxdydz = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dxdydz$$

Пусть у - замкнутая поверхность, ограничивающая область V. Проведём цилиндрическую поверхность, проектирующую V на область D в плоскости xOy (рис. 41). Поверхность у разбивается при этом на две поверхности: у$_1$, уравнение которой $z = z_1(x; y)$ и у$_2$, уравнение которой $z = z_2(x; y)$.

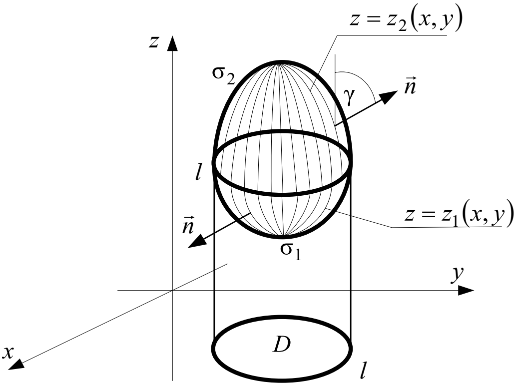

Рис. 41.

Цилиндрическая поверхность пересекает область V по линии l. Тогда, разбивая тройной интеграл на три $I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dxdydz$, $I_2 = \iiint\limits_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dxdydz$ и $I_3 = \iiint\limits_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dxdydz$, вычислим каждый из них отдельно.

$$I_3 = \iiint\limits_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial a_z}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_D dxdy \left(a_z(x, y, z)\right)\Big|_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} =$$

$$= \iint\limits_D a_z\left(x, y, z_2(x, y)\right) dxdy - \iint\limits_D a_z\left(x, y, z_1(x, y)\right) dxdy .$$

Зададим единичную нормаль к поверхности у в виде: $\vec{n} = \{\cos б, \cos в, \cos г\}$, где б, в, г - углы нормали с координатными осями Ox, Oy и Oz.

Два последних двойных интеграла являются поверхностными интегралами, вычисленными при проектировании поверхности в плоскость xOy. Причем первый интеграл – интеграл по поверхности σ_2, на которой $\cos\gamma > 0$. Второй интеграл - интеграл по поверхности σ_1, на которой $\cos\gamma < 0$. Учитывая, что $dxdy = |\cos\gamma| d\sigma$, интеграл I_3 можно записать в виде суммы поверхностных интегралов.

$$I_3 = \iint\limits_{\sigma_2} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma dxdy - \iint\limits_{\sigma_1} a_z(x,y,z)(-\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma dxdy + \iint\limits_{\sigma_1} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma =$$

$$= \oiint\limits_{\sigma} a_z(x,y,z)\cos\gamma d\sigma .$$

где интегрирование ведётся по всей поверхности σ в направлении внешней нормали, а угол γ – угол между нормалью $\vec{n}$ и осью Oz.

Аналогично, проектируя поверхность σ в координатную плоскость xOz (рис. 42), можно показать, что

$$I_2 = \iiint\limits_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{\sigma} a_y(x,y,z)\cos\beta d\sigma ,$$

где интегрирование ведётся по всей поверхности σ в направлении внешней нормали, а угол β – угол между нормалью $\vec{n}$ и осью Oy.

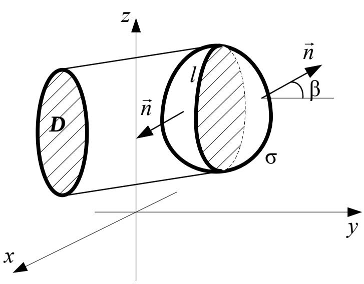

Рис. 42.

При проектировании поверхности у в координатную плоскость yOz (рис. 43), показывается, что

$$I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{\text{у}} a_x(x, y, z) \cos \text{б}\, d\text{у} \ ,$$

где интегрирование ведётся по всей поверхности у в направлении внешней нормали, а угол б – угол между нормалью $\vec{n}$ и осью Ox .

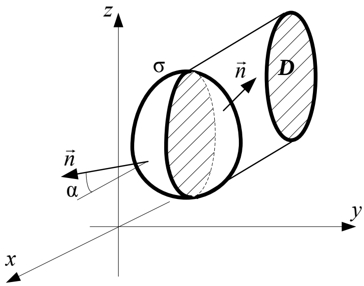

Рис. 43.

Тогда тройной интеграл равен сумме всех трех поверхностных интегралов.

$$\iiint\limits_V div\, \vec{a} dxdydz = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 = \oiint\limits_{\text{у}} \left(a_x \cos \text{б} + a_y \cos \text{в} + a_z \cos \text{г} \right) d\text{у} =$$

$$= \oiint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n}) d\text{у} \ ,$$

где $\vec{n}$ - единичная внешняя нормаль к границе области V .

Задача 2

Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ через замкнутую поверхность у : $x - y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в направлении внешней нормали по теореме Гаусса--Остроградского.

Решение

Эта задача была решена в предыдущем разделе без использования теоремы Гаусса – Остроградского. Поскольку

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

то поток $P = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz = 0$.

Задача 3

Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z\vec{k}$ через замкнутую поверхность у: $x^2 + y^2 = z$, $z = 1$ в направлении внешней нормали по теореме Гаусса - Остроградского и непосредственно.

Решение

Поверхность у показана на рисунке 44. Вычислим поток векторного поля через нее двумя способами.

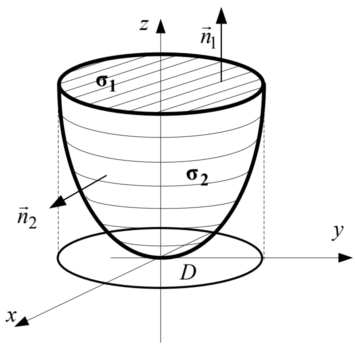

Рис. 44.

1. Используем теорему Гаусса - Остроградского. Для этого вычислим дивергенцию поля.

$$div\,\vec{a} = 2x + 2y - 1.$$

По теореме Гаусса – Остроградского вычислим поток P через замкнутую поверхность у.

$$P = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dxdydz = \iiint\limits_V (2x + 2y - 1)dxdydz\ .$$

Тройной интеграл сведем к двойному интегралу, проектируя область V в плоскость xOy.

$$P = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} (2x + 2y - 1)dz = \iint\limits_D dxdy(2x + 2y - 1)\, z \Big|_{x^2+y^2}^{1} =$$

$$= \iint\limits_D dxdy(2x + 2y - 1)\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

Решив совместно уравнения ограничивающих область V поверхностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases},$$

выясним, что область D, на которую проектируется область V, представляет собой круг радиуса 1, лежащий в плоскости $z = 1$ (рис. 45).

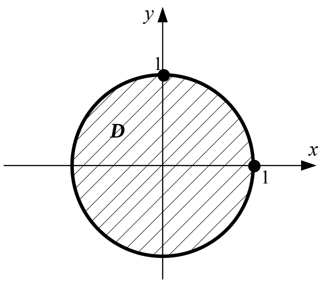

Рис. 45.

Перейдем в полученном двойном интеграле к полярным координатам.

$$P = \iint\limits_D (2\text{с}\cos\text{ц} + 2\text{с}\sin\text{ц} - 1)\left(1 - \text{с}^2\right)\text{с}\, d\text{с}\, d\text{ц} =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\text{р}} (\cos\text{ц} + \sin\text{ц})d\text{ц}\int\limits_0^1 \left(\text{с}^2 - \text{с}^4\right)d\text{с} - \int\limits_0^{2\text{р}} d\text{ц}\int\limits_0^1 \left(\text{с} - \text{с}^3\right)d\text{с}\ .$$

В каждом из двух повторных интегралов переменные разделены. Они являются произведениями интегралов, из которых один зависит только от переменной ц, а другой – от переменной с. Первый повторный интеграл равен нулю, так как в нем внешний интеграл вычисляется от синуса и косинуса по периоду. Поэтому поток P записывается в виде следующего интеграла.

$$P = -\int\limits_0^{2р} dц \int\limits_0^1 \left(с - с^3\right) dс = -2р\left(\frac{с^2}{2} - \frac{с^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -2р\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{р}{2}.$$

2. Теперь вычислим поток, разделяя его на два потока

$$P = P_1 + P_2.$$

Поток P_1 вычисляется через поверхность $у_1$ в направлении нормали $\vec{n}_1$, а поток P_2 вычисляется через поверхность $у_2$ в направлении нормали $\vec{n}_2$ (рис. 44).

$$P_1 = \iint\limits_{у_1} \left(\vec{a}, \vec{n}_1\right) dу, \quad P_2 = \iint\limits_{у_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_2\right) dу.$$

Обе поверхности проектируются в плоскость xOy в область D (рис. 45).

$у_1$: $z = 1$; $\vec{n}_1 = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\left(\vec{a}, \vec{n}_1\right) = -z = -1$. Тогда

$$P_1 = \iint\limits_{у_1} (-1) dу = -S_{\text{круга}} = -р.$$

$у_2$: $x^2 + y^2 = z$, $x^2 + y^2 - z = 0$, $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

$$P_2 = \pm\iint\limits_D \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dxdy \,.$$

Вычислим $\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}$. Ясно, что $\operatorname{grad} F \uparrow\uparrow \vec{n}_2$, так оба вектора образуют с осью Oz угол, больший, чем 90°. $\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| = 1$, а

$$(\vec{a}, \operatorname{grad} F) = 2x^3 + 2y^3 + z = 2x^3 + 2y^3 + x^2 + y^2 \,.$$

Выбирая знак плюс перед интегралом в формуле для потока P_2, получим

$$P_2 = \iint\limits_D \left(2x^3 + 2y^3 + x^2 + y^2\right) dxdy \,.$$

В полученном интеграле перейдем к полярным координатам.

$$P_2 = \iint\limits_D \left(2\text{с}^3\left(\cos^3 \text{ц} + \sin^3 \text{ц}\right) + \text{с}^2\right)\text{с}\, d\text{с}\, d\text{ц} =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\text{р}} \left(\cos^3 \text{ц} + \sin^3 \text{ц}\right) d\text{ц} \int\limits_0^1 \text{с}^4 d\text{с} + \int\limits_0^{2\text{р}} d\text{ц} \int\limits_0^1 \text{с}^3 d\text{с} =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\text{р}} \left(1 - \sin^2 \text{ц}\right) d(\sin \text{ц}) \int\limits_0^1 \text{с}^4 d\text{с} - 2\int\limits_0^{2\text{р}} \left(1 - \cos^2 \text{ц}\right) d(\cos \text{ц}) \int\limits_0^1 \text{с}^4 d\text{с} +$$

$$+ \int\limits_0^{2\text{р}} d\text{ц} \int\limits_0^1 \text{с}^3 d\text{с} =$$

$$= 2\left(\sin \text{ц} - \frac{\sin^3 \text{ц}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\text{р}} \cdot \frac{\text{с}^5}{5}\Bigg|_0^1 - 2\left(\cos \text{ц} - \frac{\cos^3 \text{ц}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\text{р}} \cdot \frac{\text{с}^5}{5}\Bigg|_0^1 +$$

$$+ 2\text{р} \cdot \frac{\text{с}^4}{4}\Bigg|_0^1 = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{5} - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{\text{р}}{2} = \frac{\text{р}}{2} \,.$$

Следовательно, поток через всю поверхность определяется по формуле

$$P = -\text{р} + \frac{\text{р}}{2} = -\frac{\text{р}}{2}.$$

Задача 4

Найти поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$ через замкнутую поверхность S, образованную цилиндром $x^2 + z^2 = 9$ и плоскостями $y = 0$ и $y = 3$ в направлении внешней нормали.

Решение

1. По теореме Гаусса – Остроградского

$$P = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz .$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a} = 1 + 1 + xy = 2 + xy$, то $P = \iiint\limits_V (2 + xy) dxdydz$.

Область V проектируется в координатную плоскость xOz на область D - круг радиуса 3 (рис. 47). Тогда тройной интеграл можно свести к двойному интегралу.

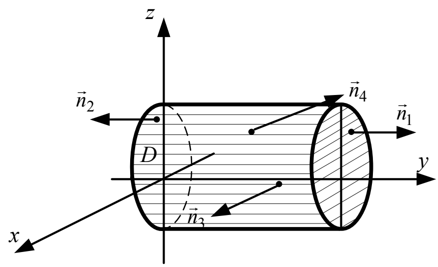

Рис. 46.

$$P = \iint\limits_D dxdz \int\limits_0^3 (2 + xy) dy = \iint\limits_D dxdz \left(2y + x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^3 = \iint\limits_D \left(6 + \frac{9}{2}x \right) dxdz .$$

Перейдём в этом двойном интеграле к полярным координатам: $\begin{cases} x = \text{с} \sin \text{ц} \\ z = \text{с} \cos \text{ц} \end{cases}$, $dxdz = \text{с}\, d\text{с}\, d\text{ц}$ (рис. 47).

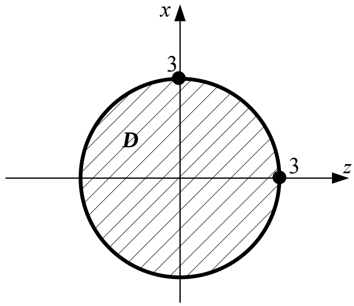

Рис. 47.

$$P=\int\limits_0^{2p}d\text{ц}\int\limits_0^{3}\text{с}\left(6+\frac{9}{2}\text{с}\sin\text{ц}\right)d\text{с}=\int\limits_0^{2p}d\text{ц}\left(6\cdot\frac{\text{с}^2}{2}+\frac{9}{2}\sin\text{ц}\cdot\frac{\text{с}^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=3\int\limits_0^{2p}\left(9+\frac{27}{2}\sin\text{ц}\right)d\text{ц}=27\left(\text{ц}-\frac{3}{2}\cos\text{ц}\right)\Bigg|_0^{2p}=27\cdot 2p=54p\ .$$

2. Вычислим поток, разбивая его на четыре потока

$$P=P_1+P_2+P_3+P_4\ .$$

$$P_1=\iint\limits_{\text{у}_1}\left(\vec{a},\vec{n}_1\right)d\text{у}\ .$$

Поскольку $\text{у}_1: y=3$, $\vec{n}_1=\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\left(\vec{a},\vec{n}_1\right)=y=3$, то

$$P_1=\iint\limits_{\text{у}_1}3\,d\text{у}=3\iint\limits_{\text{у}_1}d\text{у}=3\cdot S_{\text{круга}}=3\cdot 9p=27p\ .$$

$$P_2=\iint\limits_{\text{у}_2}\left(\vec{a},\vec{n}_2\right)d\text{у}\ .$$

Поскольку $\text{у}_2: y=0$, $\vec{n}_2=-\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\left(\vec{a},\vec{n}_2\right)=-y=0$, то

$$P_2 = \iint\limits_{\text{у}_2} 0\, d\text{у} = 0 .$$

Потоки P_3 и P_4 вычисляются через поверхность цилиндра $x^2 + z^2 = 9$, которая разделена плоскостью $x = 0$ на две части. Поток P_3 соответствует той части цилиндра, на которой $x > 0$, а поток P_4 $x < 0$.

$$P_3 = \iint\limits_{\text{у}_3} \left(\vec{a}, \vec{n}_3\right) d\text{у} = + \iint\limits_{D_1} \frac{\left(\vec{a}, \operatorname{grad} F\right)}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dydz ,$$

где $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - 9$, $grad\, F = 2x\vec{i} + 2z\vec{k}$ образует с осью Ox острый угол, $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = 2x$, а область D_1 показана на рисунке 48.

Тогда $P_3 = \iint\limits_{D_1} \dfrac{2x^2 + 2xyz^2}{2x} dydz = \iint\limits_{D_1} \left(x + yz^2\right) dydz$.

В полученном двойном интеграле $x = \sqrt{9 - z^2}$. Поэтому $P_3 = \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{9 - z^2} + yz^2\right) dydz$.

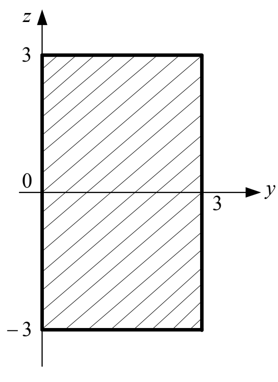

Рис. 48.

$$P_4 = \iint\limits_{у_4} (\vec{a}, \vec{n}_4) dу = +\iint\limits_{D_1} \frac{(\vec{a}, \operatorname{grad} F)}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dydz ,$$

где $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - 9$, $\operatorname{grad} F = 2x\vec{i} + 2z\vec{k}$ образует с осью Ox тупой угол, $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = -2x$, а область D_1 показана на рисунке 48.

Тогда $P_3 = \iint\limits_{D_1} \frac{2x^2 + 2xyz^2}{-2x} dydz = \iint\limits_{D_1} \left(-x - yz^2\right) dydz$.

В полученном двойном интеграле $x = -\sqrt{9 - z^2}$. Поэтому $P_4 = \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{9 - z^2} - yz^2\right) dydz$.

Сумма потоков P_3 и P_4 равна

$$P_3 + P_4 = \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{9 - z^2} + yz^2 + \sqrt{9 - z^2} - yz^2\right) dy\,dz =$$

$$= 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{9 - z^2}\, dy\,dz = 2\int_0^3 dy \int_{-3}^3 \sqrt{9 - z^2}\, dz = 2 \cdot 3 \cdot 2\int_0^3 \sqrt{9 - z^2}\, dz .$$

В полученном интеграле сделаем замену $z = 2\sin t$, $dz = 3\cos t\, dt$. Тогда

$$P_3 + P_4 = 12\int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2 t}\; 3\cos t\, dt = 54\int_0^{\frac{p}{2}} 2\cos^2 t\, dt =$$

$$= 54\int_0^{\frac{p}{2}} \left(1 + \cos 2t\right) dt = 54 \cdot \frac{p}{2} + 27\sin 2t\Big|_0^{\frac{p}{2}} = 27p .$$

Складывая все потоки, получим

$$P = 27p + 27p = 54p .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Поток через цилиндрическую поверхность удобно вычислять, записывая его в виде поверхностного интеграла 1 рода и задавая эту поверхность параметрическими уравнениями или векторным уравнением.

Если векторное уравнение поверхности у имеет вид $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, где $a \le u \le b$, $c \le v \le d$, то поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу по области $D: \begin{cases} a \le u \le b \\ c \le v \le d \end{cases}$ по формуле:

$$\iint\limits_{\text{у}} f(x, y, z)d\text{у} = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left|\left[\vec{r}_u', \vec{r}_v'\right]\right| du dv .$$

Задача 5

Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 9$, вырезанную плоскостями $y = 0$ и $y = 3$.

Решение

$$P = \iint\limits_{\text{у}} (\vec{a}, \vec{n})d\text{у} ,$$

где $\vec{n}$ - единичная нормаль, которую можно определить через градиент по формуле

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F(x, y, z)}{|\operatorname{grad} F(x, y, z)|}, \ F(x, y, z) = x^2 + z^2 .$$

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4z^2}} = \frac{2x\vec{i} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4(x^2 + z^2)}} = \frac{2x\vec{i} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4 \cdot 9}} = \frac{x\vec{i} + z\vec{k}}{3} .$$

Учитывая это, поток через поверхность цилиндра можно записать в виде поверхностного интеграла первого рода.

$$P = \tfrac{1}{3} \iint\limits_{\text{у}} \left(x^2 + xyz^2\right) d\text{у} .$$

у - цилиндрическая поверхность $x^2 + z^2 = 9$, которую можно задать параметрическими уравнениями

$$x = 3\sin \text{ц} , \ y = y , \ z = 3\cos \text{ц} ,$$

В этих уравнениях параметрами будут переменные ц и y, которые на заданной поверхности меняются в пределах:

$$0 \le ц \le 2р,\ 0 \le y \le 3.$$

Векторное уравнение поверхности имеет вид:

$$\vec{r} = 3\sin ц\vec{i} + y\vec{j} + 3\cos ц\vec{k}.$$

$$\vec{r}'_ц = 3\cos ц\vec{i} - 3\sin ц\vec{k},\ \vec{r}'_y = \vec{j}.$$

Вычислим векторное произведение

$$\left[\vec{r}'_ц, \vec{r}'_y\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\cos ц & 0 & -3\sin ц \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin ц \\ 0 \\ 3\cos ц \end{pmatrix}.$$

Модуль векторного произведения равен

$$\left|\left[\vec{r}'_ц, \vec{r}'_y\right]\right| = \sqrt{9\sin^2 ц + 9\cos^2 ц} = 3.$$

Тогда поток через поверхность у, учитывая замечание, можно записать в виде двойного интеграла

$$P = \tfrac{1}{3}\iint\limits_D \left(9\sin^2 ц + 27\sin ц\cos ц^2 y\right)3dцdy,$$

в котором область интегрирования D является прямоугольником

$$0 \le ц \le 2р,\ 0 \le y \le 3.$$

Расставляя пределы интеграции, вычислим двойной интеграл

$$P = \tfrac{1}{3}\cdot 3\int_0^{2р} dц\int_0^3 \left(9\sin^2 ц + 27\sin ц\cos^2 ц\, y\right)dy =$$

$$= \int_0^{2р} 9\sin^2 ц\, dц\int_0^3 dy + \int_0^{2р} 27\sin ц\cos^2 ц\, dц\int_0^3 y dy =$$

$$= 9\int_0^{2р} \frac{1-\cos 2ц}{2} dц \cdot y\Big|_0^3 - 27\int_0^{2р} \cos^2 ц\, d\cos ц \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^3 =$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \int_{0}^{2р} (1 - \cos 2ц)dц - 27 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{\cos^3 ц}{3} \Bigg|_{0}^{2р} .$$

Второе слагаемое в последней формуле равно нулю, интеграл от $\cos 2ц$ по промежутку $[0, 2р]$ также равен нулю. Поэтому

$$P = \frac{27}{2} \cdot 2р = 27р .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Полученный результат можно сравнить с результатом задачи 4, в которой вычислялся поток данного векторного поля через такую же цилиндрическую поверхность.

3.2.14. Физический смысл дивергенции

Пусть в области D трехмерного пространства задано векторное поле $\vec{a}$ и пусть точка $M(x_0, y_0, z_0) \in D$.

Если некоторая область $V \subset D$ содержит внутри точку M и $у$ - замкнутая поверхность, являющаяся границей области $V \subset D$, то по теореме Гаусса – Остроградского

$$\oiint\limits_{у} (\vec{a}, \vec{n}) dу = \iiint\limits_{V} div\, \vec{a}\, dxdydz .$$

По теореме о среднем тройной интеграл в правой части этого равенства можно представить в виде

$$\iiint\limits_{V} div\, \vec{a}\, dxdydz = div\, \vec{a}(P) \cdot ДV ,$$

где точка $P \in V$, а $ДV$ - объем области V .

Учитывая это, теорему Гаусса – Остроградского для области V можно записать в виде

$$\oiint\limits_{у} (\vec{a}, \vec{n}) dу = div\, \vec{a}(P) \cdot ДV ,$$

откуда следует, что $div\, \vec{a}(P) = \dfrac{\oiint\limits_{у} (\vec{a}, \vec{n}) dу}{ДV}$.

Переходя в последнем равенстве к пределу при $ДV \to 0$ так, чтобы поверхность у стягивалась в точку M , получим

$$div\,\vec{a}(M) = \lim_{ДV \to 0} \frac{\oint\!\!\oint_{у} (\vec{a},\vec{n})dу}{ДV}.$$

Из полученного равенства можно установить физический смысл дивергенции. Дивергенция равна мощности (интенсивности) потока векторного поля, отнесенной к единице объема.

3.2.15. Соленоидальное поле

Определение 1

Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$, то говорят, что в точке M ***источник***. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$, то говорят, что в точке M ***сток.***

ЗАМЕЧАНИЕ

Из определения 1 следует, что если $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни стока, ни источника.

Определение 2

Если в области D трехмерного пространства задано векторное поле $\vec{a}$ и если в каждой точке $M \in D$ $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то поле называется ***соленоидальным.***

Свойства соленоидального поля

1. В соленоидальном поле поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Так как $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то по теореме Гаусса – Остроградского поток $P = \oint\!\!\oint_{у} (\vec{a},\vec{n})dу = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz = \iiint_V 0\, dxdydz = 0$.

2. В соленоидальном поле нет источников и нет стоков.

Так как в точке M векторного поля $\vec{a}$ источник или сток, если $div\,\vec{a}(M) \neq 0$.

3. Поток через поперечное сечение векторной трубки в соленоидальном поле постоянный.

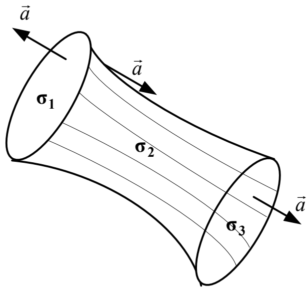

Рис. 49.

На рис. 49 поверхность $у_2$ - поверхность векторной трубки – образована векторными линиями. Вектор поля направлен по касательным к векторным линиям, поэтому поток через эту поверхность равен нулю. Поверхности $у_1$ и $у_3$ - равные поперечные сечения векторной трубки. Потоки через эти поверхности проходят в направлении противоположных единичных нормалей.

По теореме Гаусса – Остроградского поток через всю замкнутую поверхность на рис. 49 равен нулю.

$$\iint\limits_{у_1}(\vec{a},\vec{n})dу + \iint\limits_{у_2}(\vec{a},\vec{n})dу + \iint\limits_{у_3}(\vec{a},\vec{n})dу = 0.$$

Так как $\iint\limits_{у_2}(\vec{a},\vec{n})dу = 0$, то $\iint\limits_{у_1}(\vec{a},\vec{n})dу = -\iint\limits_{у_3}(\vec{a},\vec{n})dу$.

Если изменить направление нормали на поверхности $у_3$ на противоположное, то получим

$$\iint\limits_{у_1}(\vec{a},\vec{n})dу = \iint\limits_{у_3}(\vec{a},\vec{n})dу$$

Задача 1

Выяснить, будет ли поле $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k}$ соленоидальным.

Решение

Вычислим дивергенцию заданного векторного поля.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-z\left(x^2 + y^2\right)\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = y^2 + x^2 - x^2 - y^2 = 0 .$$

Следовательно, поле соленоидальное.

Задача 2

Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.

Решение

Поскольку

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) = 0 + 2 - 2 = 0 ,$$

то поле соленоидальное и, следовательно, поток через замкнутую поверхность равен нулю.

3.2.16. Циркуляция вектора по замкнутому контуру. Ротор. Теорема Стокса

Как уже говорилось, криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой l обозначается $\oint\limits_l \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right)$ и называется циркуляцией. Замкнутую кривую чаще называют замкнутым контуром.

Определение

Пусть задано векторное поле

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k} .$$

Ротором векторного поля в точке дифференцируемости P называется вектор, который обозначается $\operatorname{rot}\vec{a}(P)$ и который вычисляется через координаты векторного поля по формуле

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\ .$$

Формулу для вычисления ротора можно записать в символической, удобной для запоминания форме:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где определитель следует вычислять, используя теорему разложения по первой строке, а под символами $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}$ понимаются операции вычисления частных производных по соответствующим переменным.

Задача 1

Вычислить ротор векторного поля $\vec{a} = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$ в точке $M(2,-1,2)$.

Решение

Ротор поля в произвольной точке дифференцируемости

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & xy + z \end{vmatrix} = (x + x)\vec{i} - (y - 0)\vec{j} + (-z - 3)\vec{k} =$$

$$= 2x\vec{i} - y\vec{j} - (z + 3)\vec{k}\ .$$

Ротор поля в заданной точке $M(2,-1,2)$ равен $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$.

Теорема Стокса

Пусть в области D трехмерного пространства задано векторное поле

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

и функции $a_x(x;y;z)$, $a_y(x;y;z)$ и $a_z(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка.

Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура l, лежащего в области D, равна потоку ротора этого поля через любую поверхность у, натянутую на контур l, в направлении нормали, относительно которой обход контура положительный.

$$\oint_l \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \iint_{\text{у}} \left(\mathrm{rot}\,\vec{a}, \vec{n}\right) d\text{у} .$$

Доказательство

Будем считать, что поверхность у такова, что любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает её в одной точке.

Положительное направление единичной нормали $\vec{n}$ возьмём так, чтобы $\cos\left(\vec{n};\hat{O}z\right) > 0$, то есть $\cos\gamma > 0$ и γ - острый угол (рис. 50).

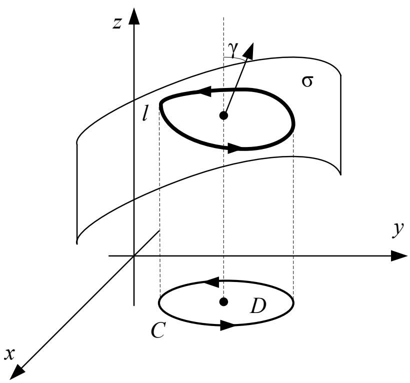

Рис. 50.

Пусть $z = z(x;y)$ - уравнение поверхности S. Единичную нормаль к этой поверхности найдем, записывая уравнение поверхности в виде

$$F(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$$

и вычисляя градиент скалярной функции $F(x, y, z)$.

$$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку третья координата положительна, то этот вектор направлен так же, как и заданная нормаль. Единичную нормаль получим, если нормируем этот вектор

$$\vec{n} = \left\{ \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \right\}.$$

Рассмотрим криволинейный интеграл:

$$\oint_l \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \oint_l a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz\ .$$

Пусть c - проекция замкнутого контура l на плоскость xOy. Направление обхода контура c соответствует направлению обхода контура l. Тогда

$$\oint_l \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \oint_c a_x(x, y, z(x, y))dx + a_y(x, y, z(x, y))dy +$$

$$+ a_z(x, y, z(x, y))\left(z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy\right) =$$

$$= \oint_c \left(a_x(x, y, z(x, y)) + a_z(x, y, z(x, y))z'_x(x, y)\right)dx +$$

$$+ \left(a_y(x, y, z(x, y)) + a_z(x, y, z(x, y))z'_y(x, y)\right)dy\ .$$

В последнем интеграле используем формулу Грина. Получим

$$\oint_l \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial z} z'_x + \frac{\partial a_z}{\partial x} z'_y + \frac{\partial a_z}{\partial z} z'_x z'_y + a_z z''_{xy} - \right.$$

$$-\frac{\partial a_x}{\partial y}-\frac{\partial a_x}{\partial z}z'_y-\frac{\partial a_z}{\partial y}z'_x-\frac{\partial a_z}{\partial z}z'_y z'_x-a_z z''_{yx}\Bigg)dxdy=$$

$$=\iint_D\Bigg[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\frac{-z'_x}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}+$$

$$+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\frac{-z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}+$$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\Bigg]\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=$$

$$=\iint_D(\mathrm{rot}\,\vec{a},\vec{n})\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\iint_{\mathrm{y}}(rot\,\vec{a},\vec{n})d\mathrm{y}\ .$$

Задача 2

Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\left(x^2-y\right)\vec{i}+x\vec{j}+\vec{k}$ вдоль контура $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$.

Решение

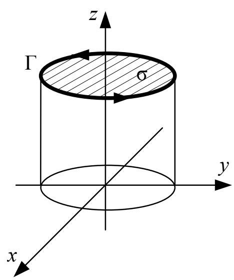

Рис. 51.

1. Вычислим циркуляцию $C = \oint\limits_{\Gamma} \left(x^2 - y\right)dx + xdy + 1 \cdot dz$, задавая контур Γ (рис. 51) параметрическими уравнениями:

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} dx = -\sin t\, dt \\ dy = \cos t\, dt \\ dz = 0 \end{cases}, \ 0 \le \mathrm{t} \le 2\mathrm{p} .$$

Тогда циркуляцию векторного поля можно записать в виде определенного интеграла

$$C = \int\limits_{0}^{2\mathrm{p}} \left(\left(\cos^2 t - \sin t\right)\left(-\sin t\right) + \cos t \cos t + 0\right)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\mathrm{p}} \left(\cos^2 t\left(-\sin t\right) + \sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = \int\limits_{0}^{2\mathrm{p}} \left(\cos^2 t\left(-\sin t\right) + 1\right)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\mathrm{p}} \cos^2 t\, d\left(\cos t\right) + 2\mathrm{p} = \left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_{0}^{2\mathrm{p}} + 2\mathrm{p} = 2\mathrm{p} .$$

2. Вычислим циркуляцию, используя теорему Стокса:

$$C = \iint\limits_{\mathrm{y}} \left(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}\right) d\mathrm{y} ,$$

где y - поверхность круга радиуса 1, лежащего в плоскости $z = 1$.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & x & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(0 - 0\right) - \vec{j}\left(0 - 0\right) + \vec{k}\left(1 + 1\right) = 2\vec{k} .$$

Поскольку единичной нормалью, со стороны которой обход контура положительный, к поверхности $z = 1$ является вектор $\vec{k}$, то $\left(\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}\right) = \left(2\vec{k}, \vec{k}\right) = 2$. Поэтому

$$C = \iint\limits_{\mathrm{y}} 2 d\mathrm{y} = 2S_{\text{круга}} = 2\mathrm{p} .$$

2.3.17. Физический смысл ротора. Безвихревое поле

Выясним физический смысл ротора в некоторой точке M_0 дифференцируемости поля $\vec{a}$. Для этого рассмотрим любой замкнутый контур l, внутри которого лежит точка M_0. Если у - поверхность, в которой лежит контур l и точка M_0, то можно использовать теорему Стокса, записывая ее в виде

$$\oint_l \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \iint_{\text{у}} \text{Пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{a} d\text{у} \, .$$

Используем теорему о среднем для поверхностного интеграла

$$\oint_l \left(\vec{a}, \overrightarrow{dr}\right) = \text{Пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{a}(P) \cdot S_{\text{у}} \, ,$$

где P - некоторая точка внутри контура l, а $S_{\text{у}}$ - площадь поверхности у. Из последнего соотношения получим

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{a}(P) = \frac{\oint_l (\vec{a}, \vec{n})}{S_{\text{у}}} \, .$$

Перейдем к пределу при $S_{\text{у}} \to 0$ так, чтобы контур l стягивался в точку M_0. Тогда

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{a}(M_0) = \lim_{S_{\text{у}} \to 0} \frac{\oint_l (\vec{a}, \vec{n})}{S_{\text{у}}} \, .$$

Проекция ротора векторного поля на единичную нормаль в точке M_0 равна пределу отношения циркуляции векторного поля вдоль контура l, лежащего в перпендикулярной этой нормали площадке к площади области, ограниченной контуром l при условии, что область стягивается в точку M_0.

Следовательно, ротор характеризует вращательную способность поля в данной точке. Его направление параллельно оси вращения. Его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения.

ЗАМЕЧАНИЕ

Направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение.

Определение

Если во всех точках поля $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, то поле называется ***безвихревым.***

В безвихревом поле циркуляция вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

2.3.18. Потенциальное поле

Определение

Векторное поле $\vec{a}$ называется ***потенциальным,*** если существует скалярная функция $u(x;y;z)$, такая, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$.

Функция $u(x;y;z)$ при этом называется ***потенциалом поля***.

Теорема

Для того, чтобы поле вектора $\vec{a}$ было потенциально, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Доказательство

Докажем только необходимость. Пусть поле вектора $\vec{a}$ - потенциально. Докажем, что $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Из потенциальности поля следует, что существует скалярная функция $u(x,y,z)$, такая что:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ a_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ a_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Так как

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

Следовательно: $\operatorname{rot}\vec{a}=0$ и потенциальное поле всегда безвихревое.

Обратное утверждение - безвихревое поле потенциально - верно только в том случае, если область дифференцируемости поля является односвязной.

Свойства потенциального поля

1. Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности потенциального поля, равна нулю, так как

$$\oint\limits_{l}\left(\vec{a},\overrightarrow{dr}\right)=\iint\limits_{\text{y}}\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}\right)d\text{y}=0.$$

2. В области непрерывности потенциала поля криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, а равен разности значений потенциала в конце и начале пути интегрирования, так как

$$\int\limits_A^B\left(\vec{a},d\vec{r}\right)=\int\limits_A^B\left(\operatorname{grad}u,d\vec{r}\right)=\int\limits_A^B du=u(B)-u(A).$$

3. Потенциал поля в произвольной точке $M(x,y,z)$ вычисляется по формуле

$$u(M)=u(x,y,z)=\int\limits_A^M(\vec{a},d\vec{r})+C,$$

которая следует из предыдущего свойства при $C=u(A)$, а A - любая точка, лежащая в области непрерывности поля.

4. Работа потенциального поля на пути AB равна разности потенциалов в конечной и начальной точках пути:

$$A=\int\limits_{(AB)}a_x dx+a_y dy+a_z dz=u(B)-u(A).$$

Задача

Проверьте потенциальность поля $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$. Найдите его потенциал и вычислите работу поля $\vec{a}$ при перемещении точки из M в N, если $M(1;-2;3)$; $N(2;-1;-2)$.

Решение

Поле потенциально, если его ротор равен нулю.

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}=(x-x)\vec{i}-(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=0.$$

Найдём потенциал поля

$$u(M)=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(\vec{a},d\vec{r})+C=\int\limits_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}yzdx+xzdy+xydz+C.$$

Путь интегрирования выберем в виде ломаной, отрезки которой параллельны координатным осям (рис. 52). Тогда

$$u(M)=\int\limits_{OP}yzdx+\int\limits_{PQ}xzdy+\int\limits_{QM}xydz+C=$$

$$=\int\limits_0^x 0dx+\int\limits_0^y 0dy+\int\limits_0^z xydz+C=xy\int\limits_0^z dz+C=xyz+C.$$

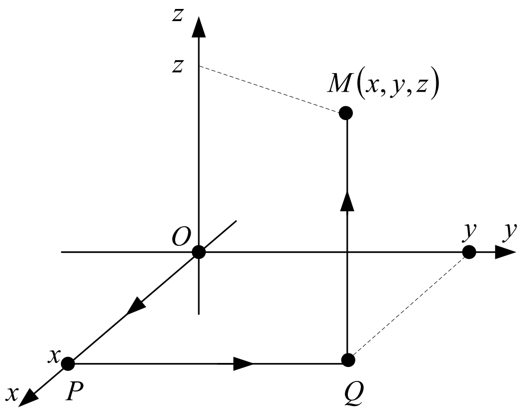

Рис. 52.

Потенциал поля равен $u(x, y, z) = xyz + C$. Работа поля на пути MN равна разности потенциалов в конечной и начальной точке.

$$A = u(2, -1, -2) - u(1, -2, 3) = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 = 10.$$

3.2.19. Лапласово поле

Определение

Векторное поле $\vec{a}$ называется ***лапласовым*** или ***гармоническим,*** если в каждой точке его дифференцируемости $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ и $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Лапласово поле является одновременно потенциальным и соленоидальным. Для него выполняются все свойства потенциального и соленоидального полей.

Лапласово поле $\vec{a}$ – поле некоторого градиента, то есть $\vec{a} = \operatorname{grad} u$. Так как $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то потенциал лапласова поля удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

которое называется ***уравнением Лапласа.*** Функция, являющаяся решением этого уравнения, называется ***гармонической.***

3.2.20. Оператор Гамильтона

Определение

Оператором Гамильтона или оператором «Набла» называется оператор следующего вида:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

С помощью оператора Гамильтона можно в удобной форме записать все дифференциальные операции теории поля.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla} u\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\operatorname{grad} u, \vec{l}\,\right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{l}\,\right) u\,.$$

$$\operatorname{div} \overleftarrow{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \left(\overline{\nabla}, \vec{a}\right).$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left[\vec{\nabla}, \vec{a}\right].$$

С помощью оператора Гамильтона легко доказываются некоторые теоремы теории поля.

Теорема 1

Поле градиента всегда потенциально.

Доказательство

Записывая операцию вычисления ротора через оператор Гамильтона и учитывая свойства векторного произведения, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u\right] = \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right] u = 0\,.$$

Теорема 2

Поле ротора всегда соленоидально.

Доказательство

Записывая операцию вычисления дивергенции через оператор Гамильтона и учитывая свойства смешанного произведения, получим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{a}\right]\right) = 0 .$$

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Как определяется двойной интеграл по области? В чем состоит геометрический и механический смысл двойного интеграла?

2. Какая функция называется интегрируемой по области? Какие функции являются интегрируемыми?

3. Какими свойствами обладает двойной интеграл?

4. Что такое повторный интеграл и как связаны пределы интеграции в нем с уравнениями границ области интегрирования?

5. Что такое якобиан преобразования и как он выглядит при переходе к полярным и эллиптическим координатам?

6. По каким формулам вычисляются статические моменты тонкой плоской пластины относительно координатных осей? Относительно начала координат?

7. По каким формулам вычисляются координаты центра тяжести тонкой плоской пластины?

8. По каким формулам вычисляются моменты инерции тонкой плоской пластины относительно координатных осей? Относительно начала координат?

9. Как определяется тройной интеграл по пространственной области? В чем состоит геометрический и механический смысл тройного интеграла?

10. Какими свойствами обладает тройной интеграл?

11. Как сводится тройной интеграл к двойному?

12. Что такое сферические координаты и как они связаны с декартовыми?

13. Как выглядит якобиан преобразования при переходе к сферическим координатам?

14. По каким формулам вычисляются статические моменты пространственного тела относительно координатных осей?

Относительно начала координат? Относительно координатных плоскостей?

15. По каким формулам вычисляются координаты центра тяжести пространственного тела?
16. По каким формулам вычисляются моменты инерции пространственного тела относительно координатных осей? Относительно начала координат? Относительно координатных плоскостей?
17. Как определяется криволинейный интеграл первого рода по пространственной кривой? По плоской кривой?
18. Каков его геометрический и механический смысл?
19. Какими свойствами обладает криволинейный интеграл первого рода?
20. Как сводится криволинейный интеграл первого рода к определенному?
21. По каким формулам вычисляются статические моменты пространственной кривой относительно координатных осей? Относительно начала координат? Относительно координатных плоскостей?
22. По каким формулам вычисляются координаты центра тяжести пространственной кривой?
23. По каким формулам вычисляются моменты инерции пространственного тела относительно координатных осей? Относительно начала координат? Относительно координатных плоскостей?
24. Какая формула называется формулой Грина?
25. Как определяется поверхностный интеграл первого рода по заданной поверхности?
26. Каков его геометрический и механический смысл?
27. Какими свойствами обладает поверхностный интеграл первого рода?
28. Как сводится поверхностный интеграл первого рода к двойному интегралу?
29. Что такое скалярное поле? Какие поверхности являются его поверхностями уровня?
30. Как определяется производная скалярного поля по заданному направлению?

31. Что такое градиент скалярного поля и каков его физический смысл?
32. Как определяется производная векторной функции?
33. Что такое векторное поле?
34. Какие линии называются его векторными линиями?
35. Как определяется поверхностный интеграл второго рода?
36. Какой физический смысл поверхностного интеграла второго рода?
37. Какие общие свойства у поверхностного интеграла первого и второго рода? Какие свойства у них различные?
38. Как формулируется теорема Гаусса – Остроградского?
39. Что такое дивергенция векторного поля?
40. Какой физический смысл дивергенции?
41. Какое поле называется соленоидальным?
42. Как определяется криволинейный интеграл второго рода?
43. Какой механический смысл криволинейного интеграла второго рода?
44. Какие общие свойства у криволинейного интеграла первого и второго рода? Какие свойства у них различные?
45. Как формулируется теорема Стокса?
46. Что такое ротор векторного поля?
47. Какой физический смысл ротора?
48. Какое поле называется безвихревым?
49. Какое поле называется потенциальным?
50. Какие свойства потенциального поля?
51. Чему равна работа в потенциальном поле?
52. Как записываются через оператор Гамильтона градиент, дивергенция и ротор?
53. Что можно сказать про поле градиента некоторого скалярного поля?
54. Что можно сказать про поле ротора некоторого векторного поля?

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Области в арифметическом пространстве. Диаметр области. Мера области.
2. Интеграл по области и его свойства.

3. Двойной интеграл. Определение, геометрический и механический смысл.
4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
5. Замена переменных в двойном интеграле.
6. Двойной интеграл в полярных и эллиптических координатах.
7. Тройной интеграл. Его геометрический и механический смысл.
8. Тройной интеграл. Вычисление в декартовых координатах.
9. Сферическая система координат. Элемент объема в сферической системе координат. Тройной интеграл в сферической системе координат.
10. Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства, вычисление и механические приложения.
11. Криволинейный интеграл первого рода для плоской кривой. Формула Грина.
12. Поверхностный интеграл первого рода. Его свойства, вычисление и механические приложения.
13. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Его свойства и физический смысл.
14. Векторное поле. Векторные линии.
15. Поверхностный интеграл второго рода. Поток векторного поля через поверхность.
16. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства и вычисление.
17. Теорема Гаусса-Остроградского и ее использование для вычисления потока. Дивергенция векторного поля.
18. Дивергенция векторного поля. Физический смысл дивергенции. Соленоидальное поле.
19. Работа силового поля. Криволинейный интеграл второго рода, его свойства и вычисление.
20. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса и ее использование для вычисления циркуляции. Ротор векторного поля.
21. Ротор векторного поля, его физический смысл. Безвихревое поле.

22. Потенциальное поле, потенциал. Вычисление криволинейного интеграла второго рода в потенциальном поле. Работа, как разность потенциалов.

23. Оператор Гамильтона, его использование для выражения градиента, дивергенции, ротора. Операции второго порядка в векторном анализе.

6. ВЫПИСКА ИЗ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

16. Двойной интеграл. Его геометрический смысл. Вычисление в декартовых координатах. Выдача типового расчета по теме: «Интегральное исчисление ФНП и теория поля».

Л.4: 3496, 3498, 3504 (2,3), 3508, 3510.

17. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных и эллиптических координатах. Механические приложения двойного интеграла.

Л.4: 3532, 3535, 3538, 3540, 3542, 3650.

18. Тройной интеграл. Вычисление в декартовых координатах.

Л.4: 3517, 3523, 3524, 3552, 3577.

19. Сферическая системы координат. Замена переменных в тройном интеграле. Приложения тройного интеграла.

Л.4: 3549, 3551, 3610, 3618, 3665, 3668.

20. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода. Их вычисление и приложения.

Л.4: 3771, 3774, 3792, 3794.

Л.6: 2.1, 2.7, 2.9, 2.10.

21. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Его свойства и физический смысл.

Л.4: 3440, 3442, 3451, 3456, 3455.

Л.6: 1.24, 1.35, 1.21.

22. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность. Физический смысл потока в поле скоростей жидкости. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства и вычисление.

Л.6: 2.26, 2.27, 2.28, 2.32, 2.38.

23. Дивергенция векторного поля. Физический смысл дивергенции. Выражение ее в декартовых координатах.

Соленоидальное поле. Формула Гаусса-Остроградского и ее использование для вычисления потока.

Л.4: 3887, 3888, 3893.

Л.6: 3.7, 3.8.

24. Работа силового поля. Циркуляция векторного поля. Криволинейный интеграл второго рода, его свойства и вычисление.

Л.4: 3819, 3820, 3822.

Л.6: 2.17, 2.21, 2.22, 2.25.

25. Ротор векторного поля, его физический смысл и вычисление в декартовых координатах. Формула Стокса и ее использование для вычисления циркуляции.

Л.6: 3.13, 3.14, 3.15.

26. Контрольная работа.

- Перемена порядка интегрирования в двойном интеграле.
- Тройной интеграл и его приложения.
- Вычисление потока векторного поля.
- Вычисление циркуляции векторного поля.

27. Потенциальное поле, потенциал. Вычисление криволинейного интеграла второго рода в потенциальном поле. Работа, как разность потенциалов. **Прием типового расчета по теме:** «Интегральное исчисление ФНП и теория поля».

Л.6: 4.1, 4.2, 4.3.

7. ТЕСТ ПО ТЕМЕ 10: «ИНТЕГРАЛЬНЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

1. По какой переменной взят внешний интеграл в повторном интеграле $\int\limits_{1}^{2}\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^2} f(x,y)dxdy$? Укажите номер верного ответа в таблице 3.

Таблица 3

1	2
По переменной x.	По переменной y.

2. Какой из повторных интегралов соответствует двойному интегралу $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ по области: $y \ge x^2$ и $y \le x$? Укажите номер верного ответа в таблице 4.

Таблица 4

1	2	3
$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x^2} f(x,y)dy$	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dx$

3. Какова область интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$? Укажите номер верного ответа в таблице 5.

Таблица 5

1	2	3	4
$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 2-y \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2-x \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

4. Как преобразуется элемент $dxdy$ в двойном интеграле при переходе к полярным координатам? Укажите номер верного ответа в таблице 6.

Таблица 6

1	2	3	4
$d\text{ц}d\text{с}$	$\text{с}d\text{ц}d\text{с}$	$\text{с}^2 d\text{ц}d\text{с}$	$\text{ц}d\text{ц}d\text{с}$

5. Какой из повторных интегралов в таблице 7 в полярных координатах имеет вид: $\int\limits_0^{\frac{\text{p}}{4}} d\text{ц} \int\limits_0^{\sqrt{2}} f(\text{с},\text{ц})\text{с}d\text{с}$? Укажите номер верного в таблице 7 ответа.

Таблица 7

1	2	3
$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{x^2} f(x,y)dy$	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

6. Как в полярных координатах выглядит двойной интеграл по области $\begin{cases} x+y \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$? Укажите номер верного ответа в таблице 8.

Таблица 8

1	2	3
$\int\limits_0^{\frac{\text{p}}{2}} d\text{ц} \int\limits_0^1 f(\text{с},\text{ц})\text{с}\,d\text{с}$	$\int\limits_0^{\frac{\text{p}}{2}} d\text{ц} \int\limits_{\frac{1}{\cos\text{ц}+\sin\text{ц}}}^{1} f(\text{с},\text{ц})d\text{с}$	$\int\limits_0^{\frac{\text{p}}{2}} d\text{ц} \int\limits_{\frac{1}{\cos\text{ц}+\sin\text{ц}}}^{1} f(\text{с},\text{ц})\text{с}\,d\text{с}$

7. Какой из повторных интегралов в таблице 9 равен объему тела, ограниченного поверхностями: $x=y^2$, $x=1$, $z=0$, $z=x$. Укажите номер верного ответа.

Таблица 9

1	2	3
$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy \int\limits_0^x dz$	$\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2}^1 dx \int\limits_0^x dz$	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{y^2}^1 dy \int\limits_0^x dz$

8. Какой из тройных интегралов в сферических координатах в таблице 10 задан по области, ограниченной поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2+z^2=1$. Укажите номер верного ответа.

Таблица 10

1	2
$\int\limits_0^{2\text{p}} d\text{ц} \int\limits_0^{\frac{\text{p}}{4}} d\text{и} \int\limits_0^1 f(r,\text{ц},\text{и})r^2dr$	$\int\limits_0^{\frac{\text{p}}{2}} d\text{ц} \int\limits_0^{\frac{\text{p}}{4}} \sin\text{и}\,d\text{и} \int\limits_0^1 f(r,\text{ц},\text{и})r^2dr$

9. По какой из формул вычисляется момент инерции относительно оси Oy кривой l, если задана плотность $\mathrm{c}(x, y, z)$? Укажите номер верного ответа в таблице 11.

Таблица 11

1	2	3
$\int\limits_l \mathrm{c}(x, y, z)dl$	$\int\limits_l \mathrm{c}(x, y, z)y^2 dl$	$\int\limits_l \mathrm{c}(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right)dl$

10. Как преобразуется элемент поверхности в интеграле 1 рода $\iint\limits_{\mathrm{y}} f(x.y.z)d\mathrm{y}$, если поверхность задана уравнением $z = x^2 + y^2$? Укажите номер верного ответа в таблице 12.

Таблица 12

1	2
$d\mathrm{y} = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dxdy$	$d\mathrm{y} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$

11. Как преобразуется элемент дуги в криволинейном интеграле 1 рода $\int\limits_l f(x, y, z)dl$, если кривая задана уравнениями $\begin{cases} x = 3 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$? Укажите номер верного ответа в таблице 13.

Таблица 13

1	2	3
$dl = \sqrt{9 + 4y^2 + 4z^2}\, dt$	$dl = \sqrt{2}dt$	$dl = 2ydy + 2zdz$

12. В каком направлении от точки $M(1, 2, -1)$ скалярное поле $u = \dfrac{yz}{x}$ возрастает быстрее всего? Укажите номер верного в таблице 14 ответа.

Таблица 14

1	2	3
$\{1; 1; 1\}$	$\{-2; 1; 2\}$	$\{2; -1; 2\}$

13. Возрастает или убывает скалярное поле $u = y\sqrt{x^2 - z^2}$ от точки $A(1, -1, 0)$ к точке $B(3, 1, 1)$? Укажите номер верного в таблице 15 ответа.

Таблица 15

1	2	3
Возрастает.	Убывает.	Не меняется.

14. Является ли векторное поле $\vec{a} = y^2\vec{i} - xz\vec{j} + 3\vec{k}$ соленоидальным? Укажите номер верного в таблице 16 ответа.

Таблица 16

1	2
Да.	Нет.

15. Потенциально ли векторное поле $\vec{a} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$? Укажите номер верного в таблице 17 ответа.

Таблица 17

1	2
Да.	Нет.

16. Для какого векторного поля функция $u = x^2 y + xz^2 + 1$ является потенциалом? Укажите номер верного в таблице 18 ответа.

Таблица 18

1	2
$\vec{a} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j} + 2xz\vec{k}$	$\vec{a} = \left(2xy + z^2\right)\vec{i} + x^2\vec{j} + 2xz\vec{k}$

17. Векторное поле $\vec{a} = rot\,\vec{b}$, где $\vec{b} = y^2\vec{i} - 2y\vec{j} + xz\vec{k}$. Является ли это поле потенциальным? Соленоидальным? Ни тем ни другим? Укажите номер верного в таблице 19 ответа.

Таблица 19

1	2	3
Соленоидальное.	Потенциальное.	Ни тем, ни другим.

18. Чему равен поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} x = \sqrt{y^2 + z^2} \\ x = 1 \end{cases}$? Укажите номер верного в таблице 20 ответа.

Таблица 20

1	2	3	4
p	$\frac{p}{3}$	$2p$	0

19. Чему равна циркуляция вдоль контура $\Gamma: \begin{cases} x^2 + z^2 = y \\ y = 4 \end{cases}$ векторного поля $\vec{a} = grad\, u$, если $u = \frac{\sqrt{xy}}{z}$? Укажите номер верного в таблице 21 ответа.

Таблица 21

1	2	3	4
1	–1	0	$2p$

20. Чему равен поток векторного поля $\vec{a} = y^3\vec{i} - 2x^2z^2\vec{j} + \left(x^2 - 2y^2\right)\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$? Укажите номер верного в таблице 22 ответа.

Таблица 22

1	2	3	4
$2p$	0	$\frac{p}{2}$	$-p$

8. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т2, М.: Наука, 1985.
2. Г.П.Толстов. Курс математического анализа. Т.2. М.: Наука, 1972.
3. Д.М.Письменный. Лекции по высшей математике. М.: Айрис, 2001.
4. Г.Н.Берман. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1985.

Дополнительная

5. В. Немыцкий, М.Слудская, А.Черкасов. Курс математического анализа. 2 том, М.:Наука,1987.
6. А.В.Ефимов, Б.П. Демидович. Сборник задач по математике. Специальные разделы математического анализа. М.: Наука, 1981.

9. ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

Таблица 23

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Ответ	1	2	1	2	3
№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ответ	3	2	2	3	2
№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Ответ	2	3	3	1	2
№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	2	1	2	3	2